ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik II

Reel Sayılar

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 5

REEL SAYILAR

Tanım: Aşağıdaki şartları sağlayan $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ kümesine bir Dedekind kesimi ya da kısaca kesim denir.

K1) $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$

K2) $p \in \alpha$ ve $q < p \Longrightarrow q \in \alpha$

K3) $EBE(\alpha)$ yoktur

Önerme: α bir kesim, $p \in \alpha$ ve $q \notin \alpha \Longrightarrow p < q$

İspat: α bir kesim, $p \in \alpha$ ve $q \notin \alpha$ olsun.

$q \leq p$ olsaydı K2) özelliğinden $q < p$ olurdu. Bu durumda $q \in \alpha$ elde edilir. Kabul ile çelişir. O halde $p < q$ dur.

Not: Kesimleri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gibi harflerle, rasyonel sayıları da p, q, r, s, t gibi harflerle göstereceğiz.

Önerme: $r \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$$r^* = \{ p \in \mathbb{Q} \; ; \; p < r \}$$

kümesi bir kesimdir ve $\sup r^* = r$ dir.

İspat: r^* kesim mi?

K1) $r^* \neq \emptyset$, $r^* \neq \mathbb{Q}$

K2) $q \in r^*$ ve $p < q$ olsun.

$q \in r^* \Rightarrow q \in \mathbb{Q}, \; q < r$

$$\left.\begin{array}{l} q < r \\ p < q \end{array}\right\} \Rightarrow p < r \Rightarrow p \in r^*$$

K3) $p < r \Rightarrow p + p < p + r$ $\qquad$ $p < r \Rightarrow p + r < r + r$

$\Rightarrow 2p < p + r$ $\qquad$ $\Rightarrow p + r < 2r$

$\Rightarrow p < \frac{p+r}{2}$ $\qquad$ $\Rightarrow \frac{p+r}{2} < r$

$$\Rightarrow p < \frac{p+r}{2} < r \Rightarrow \frac{p+r}{2} \in r^*$$

Bu ise $EBE(r^*)$ olmadığı anlamına gelir. Çünkü iki rasyonel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı vardır.

$\therefore$ r^* bir kesimdir.

$r \notin r^*$ ve $p<r$ olsun. r den küçük tüm p rasyonel sayılar r^* ın elemanı olduğundan $\sup r^* = r$ dir.

Tanım: $r \in \mathbb{Q}$ olmak üzere r^* kesimine rasyonel kesim denir.

Örnek:
$$2^* = \{ p \in \mathbb{Q} : p < 2 \}$$
$$6^* = \{ p \in \mathbb{Q} : p < 6 \}$$

Tanım: i) α ve β iki kesim olsun. α ve β kesimleri eşit ise α ve β kesimlerine eşittirler denir ve $\alpha = \beta$ ile gösterilir.

ii) α ve β iki kesim olsun.

$$\alpha < \beta \iff \alpha \subset \beta \iff \exists p \in \beta \text{ için } p \notin \alpha$$

Önerme: K kesimler kümesi olsun. Bu durumda yukarıdaki şekilde tanımlanan bağıntıya göre $(K, \leq)$ bir tam sıralı kümedir.

İspat: $(K, \leq)$ bir kısmi sıralı kümedir.

$\alpha, \beta \in K$ olsun. $\alpha \neq \beta$ kabul edelim. Bu durumda

$$\exists\, p \in \alpha,\ p \notin \beta \Longrightarrow \beta < \alpha \quad \text{ya da}$$
$$\exists\, q \in \beta,\ q \notin \alpha \Longrightarrow \alpha < \beta$$

O halde α ile β karşılaştırılabilir olduklarından tam sıralı kümedir.

Teorem: α ve β iki kesim olsun.

$$\gamma = \{ p+q : p \in \alpha,\ q \in \beta \}$$

kümesi bir kesimdir. Bu kesime α ve β kesimlerinin toplamı denir. $\gamma = \alpha + \beta$ ile gösterilir.

İspatı: K1) $\alpha \neq \emptyset$, $\beta \neq \emptyset$ olduğundan $\exists\, p \in \alpha$, $\exists\, q \in \beta$ için $p+q = \alpha + \beta$ olur.

$$\Longrightarrow \alpha + \beta = \gamma \neq \emptyset$$

$\alpha \neq \mathbb{Q}$, $\beta \neq \mathbb{Q}$ olduğundan $\exists\, x \in \mathbb{Q}$ için $x \notin \alpha$, $\exists\, y \in \mathbb{Q}$ için $y \notin \beta$ dır.

$$\Longrightarrow x+y \notin \alpha + \beta \Longrightarrow \alpha + \beta = \gamma \neq \mathbb{Q}$$

K2) $r \in \alpha + \beta \Rightarrow s \in \mathbb{Q}$ ve $s < r$ olsun.

$\Rightarrow \exists p \in \alpha, \exists q \in \beta$ için $r = p + q$

$t \in \mathbb{Q}$ sayısını $s = t + q$ olarak seçelim.

$s = t + q < p + q = r \Rightarrow t < p \Rightarrow t \in \alpha$

$\Rightarrow s \in \alpha + \beta$

K3) $r \in \alpha + \beta$ olsun. $\exists p \in \alpha, \exists q \in \beta$ için $r = p + q$. Ayrıca $\exists s \in \alpha$ için $s > p$

$\Rightarrow s + q \in \alpha + \beta \wedge s + q > r$

$\Rightarrow r \in \alpha + \beta$ olacağından $EBE(\alpha + \beta)$ yoktur.

Örnek: $3^* + 5^* = \{ p + q : p \in 3^*, q \in 5^* \}$

$= \{ p + q : p < 3, q < 5 \}$

Önerme: α, β, γ kesimler olmak üzere

i) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

ii) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

iii) $\alpha + 0^* = 0^* + \alpha = \alpha$

Teorem: α bir kesim olsun. Bu durumda $\alpha+\beta=0^*$ olacak şekilde bir tek β kesimi vardır ve $\beta=-\alpha$ dır.

Önerme: α, β, γ kesimler olmak üzere $\beta<\gamma$ olsun. Bu durumda $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$ dır. özellikle

$$\alpha>0^* \text{ ve } \gamma>0^* \Rightarrow \alpha+\gamma>0^*$$

Önerme: α ve β, $\alpha\geq 0^*$, $\beta\geq 0^*$ olacak şekilde iki kesim olsun. Bu durumda

$$\gamma=\{pq : p\in\alpha, p\geq 0 \text{ ve } q\in\beta, q\geq 0\}\cup\mathbb{Q}^-$$

kümesi de bir kesimdir.

Bu kesime α ve β kesimlerinin çarpımı denir ve $\gamma=\alpha\beta$ ile gösterilir.

Tanım: α bir kesim olsun.

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \alpha\geq 0^*\\ -\alpha, & \alpha<0^*\end{cases}$$

Önerme: $p,q \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

i) $p^* + q^* = (p+q)^*$

ii) $p^* q^* = (pq)^*$

iii) $p^* < q^* \iff p < q$

Önerme: α ve β kesimler ve $\alpha < \beta$ olsun. Bu durumda $\alpha < r^* < \beta$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı vardır.

NOT: Tüm kesimlerin kümesini $\mathbb{R}$ ile gösterelim.

$$F: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$r \longmapsto F(r) = r^*$$

şeklinde F fonksiyonunu göz önüne alırsak F fonksiyonu

$$F(r+s) = F(r) + F(s)$$
$$F(r.s) = F(r).F(s)$$
$$r < s \iff F(r) < F(s)$$

özelliklerini sağlar.

F fonksiyonu 1-1 dir

$\alpha = \{x \in \mathbb{Q} : x.x < 2\} \cup \mathbb{Q}^-$, $\mathbb{R}$ nin bir elemanı olmasına rağmen $F(s) = \alpha$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{Q}$ olmadığından F örten değildir.

Tanım: Kesimlere reel sayılar ve tüm kesimlerin kümesi olan $\mathbb{R}$ ye reel sayılar kümesi denir.

$r \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayılara karşılık gelen r^* rasyonel kesimlerinin dışındaki kesimlere irrasyonel kesim (irrasyonel sayı) denir.

Dolayısıyla sayı kümeleri arasında

$$\boxed{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}}$$

geçerlidir.

Önerme: ($\mathbb{R}$ nin Arşimet Özelliği) : Bir $x \in \mathbb{R}$ reel sayısı için $x < p$ olacak şekilde bir $p \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik

Teşekkürler

Dr. Öğr. Gör. Abdullah DERTLİ