UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler II

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HRA

Ders 13

1.6 Diferansiyel Denklemlerin Seri Çözümleri

Tanım: x değişken ve a_n ler sabit olmak üzere x_0 noktasının **kuvvet serisi**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \quad \ldots (21)$$

şeklindedir. x_0'a **açılımın merkezi** denir.

x_0 merkezli kuvvet serisi $x = x_0$ da yakınsaktır ve bu noktadaki toplamı a_0 dır. Bir kuvvet serisi ya bir x için ya da tüm x noktaları için yakınsak olabilir. Bunun dışında seri $|x-x_0| < R$ için mutlak yakınsak, $|x-x_0| > R$ için ıraksak olduğu bir $R > 0$ sayısı vardır ve bu R sayısına **serinin yakınsaklık yarıçapı** denir. (x_0-R, x_0+R) aralığına serinin **yakınsaklık aralığı** denir.

Kuvvet serilerinin yakınsaklığı için oran testinden

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x-x_0|$$ olmak üzere $L<1$ ise seri yakınsak, $L>1$ ise seri ıraksak olacaktır. Buna göre serinin yakınsaklık yarıçapı

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad , \quad (0\le R\le\infty)$$

dır.

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots$ geometrik serisi $|x|<1$ için yakınsak ve $|x|>1$ için ıraksak olup $R=1$ dir.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad , \quad -1<x<1$$

şeklinde yazılabilir. Yani sonsuz toplam $(-1,1)$ aralığında $\frac{1}{1-x}$'e yakınsar.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad , \quad R=\infty$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad R=\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad R=\infty$$ şeklindedir.

Tanım: x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta bir f fonksiyonu $R>0$ yakınsaklık yarıçapına sahip olan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ şeklinde bir kuvvet serisinin toplamı ise bu fonksiyona x_0 da analitiktir denir. Yani kuvvet seri açılımı elde edilen özel fonksiyonlara analitik fonk denir.

Eğer f(x) fonksiyonu x_0 da analitik ise $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ sağlanır.

Şimdi de polinom katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin kuvvet serisi çözümlerini elde etmek için bir yöntem vereceğiz.

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

diferansiyel denklemini $p_1(x)=\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$, $p_2(x)=\dfrac{a_2(x)}{a_0(x)}$, ..., $p_n(x)=\dfrac{a_n(x)}{a_0(x)}$

olmak üzere

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\dots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \quad \dots (22)$$

formunda ele alalım.

Tanım: (22) denklemindeki $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ fonksiyonları $x=x_0$ noktasında analitik ise x_0 noktasına denklemin adi noktası denir. Eğer x_0 adi nokta değilse denklemin singüler (tekil) noktasıdır.

Örnek: $(x^2-1)y''+xy'+(x+1)y=0$ denklemi için

$$p_1(x)=\frac{x}{x^2-1}, \quad p_2(x)=\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1} \text{ dır.}$$

$p_1(x)$ ve $p_2(x)$ in analitikliğini bozan noktalar singüler noktalardır.

Bu durumda p_1 ve p_2 paydanın sıfır olduğu yerler hariç her yerde analitiktir.

Buna göre $p_1(x)$, $x = \mp 1$ hariç her yerde analitiktir.

$p_2(x)$, $x = 1$ hariç her yerde analitiktir

O halde $x_0 = \mp 1$ noktaları denklemin singüler noktaları, $x_0 \neq \mp 1$ noktaları adi noktalarıdır.

Örnek: $y' + 2xy = 0$ denkleminin $x=0$ civarında kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

$p_1(x) = 2x$ olup her yerde analitik olduğu $x=0$ noktası denklemin adi noktasıdır. Kuvvet serisi çözümü:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

formunda arayabiliriz. Amacımız a_n katsayılarını belirlemektir.

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{olup}$$

$$y'+2xy=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}_{\substack{x^0,\,x^1,\,x^2,\dots \\ n\to n+1}} + 2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}}_{\substack{x^1,\,x^2,\,x^3\dots \\ n\to n-1}} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n}_{x^0,\,x^1,\dots} + 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n}_{x^1,\,x^2,\dots} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1}\right\}x^n = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

Kuvvet serisinin toplamı bir aralıkta her x için sıfır ise, kuvvet serisinin tüm katsayıları sıfır olacağından

$$a_1 = 0$$

$(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1$ dır. Buna indirgeme bağıntısı denir. Buradan

$$a_{n+1} = \frac{-2}{n+1} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad \text{yazılabilir.}$$

$n=1$ için $\quad a_2 = -\frac{2}{2} a_0 = -a_0$

$n=2$ için $\quad a_3 = -\frac{2}{3} \underbrace{a_1}_{0} = 0$

$n=3$ için $\quad a_4 = -\frac{2}{4} a_2 = -\frac{1}{2}(-a_0) = \frac{1}{2} a_0$

$n=4$ için $\quad a_5 = -\frac{2}{5} a_3 = 0$

$n=5$ için $\quad a_6 = -\frac{2}{6} a_4 = -\frac{1}{3} \frac{1}{2} a_0 = \frac{-1}{3!} a_0$

$n=6$ için $\quad a_7 = -\frac{2}{7} a_5 = 0$

$n=7$ için $\quad a_8 = -\frac{2}{8} a_6 = \frac{-1}{4} \frac{-1}{3!} a_0 = \frac{1}{4!} a_0$

O halde genellersek

$a_{2n+1} = 0$, $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!} a_0$ olmaktadır. Buna göre

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \underset{0}{\cancel{a_1}} x + a_2 x^2 + \underset{0}{\cancel{a_3}} x^3 + a_4 x^4 + \underset{0}{\cancel{a_5}} x^5 + \cdots$$

$$= a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{n!} x^{2n} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

Kuvvet serisi çözümü elde edilir. Denklem birinci mertebeden olduğu için genel çözüm a_0 şeklinde bir parametreye bağlı elde edilir. Kuvvet serisi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{olduğundan} \quad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \text{ olup}$$

$y(x) = a_0 e^{-x^2}$ fonksiyonuna yakınsamaktadır.

Örnek: $2y'' + xy' + y = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$p_1(x) = \frac{x}{2}$, $p_2(x) = \frac{1}{2}$ fonksiyonları her yerde analitik olduğundan $x=0$ adi nokta olup seri çözüm $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda aranabilir.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \text{olup}$$

$$2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1) a_n x^{n-2}}_{n \to n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n}_{x^0, x^1, x^2, \ldots} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n}_{x^1, x^2, \ldots} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{x^0, x^1, \ldots} = 0$$

$$\Rightarrow 2.2.1 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$4a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n \right\} x^n = 0$$

elde edilir. Buradan

$$4a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{4} a_0$$

$2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0 \quad , n \geq 1$ indirgeme bağıntısı bulunur.

$$a_{n+2} = -\frac{1}{2(n+2)} a_n \quad , \quad n \geq 1 \text{ dir.}$$

$$n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{-1}{2.3} a_1$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{2.4} a_2 = \frac{-1}{2.4} \frac{-1}{4} a_0 = \frac{1}{2^2.} \frac{1}{2.4} a_0 = \frac{1}{2^3.1.2} a_0$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{-1}{2.5} a_3 = \frac{-1}{2.5} \frac{-1}{2.3} a_1 = \frac{1}{2^2.3.5.} a_1$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = \frac{-1}{2.6} a_4 = \frac{-1}{2.6} \frac{1}{2^2.2.4} a_0 = \frac{-1}{2^3\,2.4.6} a_0 = \frac{-1}{2^4\,1.2.3} a_0$$

$$n=5 \Rightarrow a_7 = \frac{-1}{2.7} a_5 = \frac{-1}{2.7} \frac{1}{2^2\,3.5} a_1 = \frac{-1}{2^3\,3.5.7} a_1$$

Genellersek

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} a_0 , \quad n \geq 1$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^n (1.3.5 \ldots (2n+1))} a_1 , \quad n \geq 1 \quad \text{şeklindedir.}$$

Çözüm $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (1.3.5 \ldots (2n+1))} x^{2n+1}$$

şeklinde a_0 ve a_1 iki keyfi sabitine bağlı olarak elde edilir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HRA