ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Cebir 2

Asal ve Maksimal İdealler

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 13

BÖLÜM 7

ASAL ve MAKSİMAL İDEALLER

7.1 ASAL İDEALLER

Tanım 7.1.1 R değişmeli bir halka P, R nin kendinden farklı bir ideali olsun.

$$a, b \in R, \quad a.b \in P \Rightarrow a \in P \wedge b \in P$$ ise P'ye R'nin asal ideali denir.

Örnek 7.1.2 $\mathbb{Z}$'de $10\mathbb{Z}$ ideali asal değildir. Çünki $2.5 \in 10\mathbb{Z}$ fakat $2 \notin 10\mathbb{Z} \wedge 5 \notin 10\mathbb{Z}$ dir.

Örnek 7.1.3 $\mathbb{Z}$'de $3\mathbb{Z}$ ideali asaldır. $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a.b \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow 3 | ab \Rightarrow 3 | a \vee 3 | b$ olup istenen görülür.

Teorem 7.1.4 R bir TİB olsun. Bir P idealinin asal olması için gerek ve yeter şart $\pi \in R$ asal veya sıfır olmak üzere $P=(\pi)$ olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$) P, R'nin sıfırdan farklı asal ideali olsun. $P=(a)$ olacak şekilde $a\neq 0$, $a\notin U_R$, $a\in R$ vardır. R TİB dolayısıyla TAG olduğundan π_i ler asal olmak üzere $a=\pi_1\cdots\pi_r$ şeklindedir. $r=1$ olduğunu göstermeliyiz. $r\geq 2$ olsun. $b=\pi_1$, $c=\pi_2\cdots\pi_r$, $a=bc\in P$ fakat $b\notin P$, $c\notin P$ dir. $b\in P$ olsa $d\in R$ için $b=da=d(bc)$ olup $dc=1$ yani $c\in U_R$ olur ki bu çelişkidir. Benzer şekilde $c\notin P$ olduğu gösterilebilir. $bc\in P$ iken $b\notin P \wedge c\notin P$ olması P'nin asal ideal olmasıyla çelişir. $r=1$ olmalıdır. yani a asaldır.

($\Leftarrow$) R T.B olduğundan $P=(0)$ ise P bir asal idealdir. $\pi \in R$ asal ve $P=(\pi)$ olsun. $a,b \in R$, R TİB olduğundan $a.b \in (\pi) \Rightarrow \pi \mid a.b \Rightarrow \pi \mid a \vee \pi \mid b$ olduğundan $P=(\pi)$ asal idealdir.

Teorem 7.1.5 R birimli ve değişmeli bir halka P ($P \neq R$) ideali olsun. P nin asal ideal olması için gerek ve yeter şart R/P bölüm halkasının tamlık bölgesi olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) P asal ideal olsun. R değişmeli ve birimli halka olduğundan R/P'de birimli ve değişmelidir. $a+P, b+P \in R/P$ ve $(a+P)(b+P)=ab+P=P$ ise $a.b \in P$, P asal olduğundan $a \in P \vee b \in P$ dir. yani $a+P=P \vee b+P=P$ o halde R/P sıfır bölensizdir.

($\Leftarrow$) R/P T.B olsun. $a,b \in R$ için $a.b \in P$ olsun.
$P = ab+P = (a+P)(b+P) \Rightarrow a+P = P \vee b+P = P$
$\Rightarrow a \in P \vee b \in P \Rightarrow P$ asal idealdir.

Örnek 4.1.6 $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_7$ T.B dir.

Örnek 7.1.7 $R = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ halkasında $P = 3\mathbb{Z}\times 7\mathbb{Z}$ ideali asalmıdır. $(3,1),(1,7) \in R$ ve $(3,1).(1,7) = (3,7)$ olup P'nin elemanıdır, fakat $(3,1),(1,7) \notin P$ olduğundan asal ideal değildir.

Örnek 7.1.8 $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ halkasının bütün idealleri
$I_1 = (\bar{0})$, $I_2 = (\bar{6})$, $I_3 = (\bar{4})$, $I_4 = (\bar{3})$, $I_5 = (\bar{2})$, $I_6 = (\bar{1})$
$\mathbb{Z}_{12}$ birimli ve değişmeli halkadır. $\mathbb{Z}_{12}/_{I_4} \cong \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_{12}/_{I_5} \cong \mathbb{Z}_2$
olup asal idealleri I_4 ve I_5 dir.

7.2 MAKSİMAL İDEALLER

Tanım 7.2.1 R degişmeli bir halka M' R'nin kendinden farklı bir ideali olsun. R nin M'yi kapsayan M ve R'den başka hiç bir ideali yoksa M'ye R'nin maksimal ideali denir.

Teorem 7.2.2 Birimli ve degişmeli bir halkada, en az bir maksimal ideal vardır.

İspat: (Örneklerle Soyut Cebir Teorem 4.8.1)

Örnek 7.2.3 $\mathbb{Z}_6$ halkasının maksimal ideallerini bulalım. $I_1=(\bar{0})$, $I_2=(\bar{2})$, $I_3=(\bar{3})$, $I_4=(\bar{1})$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}_6 & \\
I_2 \arrow[ur] & & I_3 \arrow[ul] \\
 & I_1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

olup I_2 ve I_3 $\mathbb{Z}_6$ nın maksimal idealleridir.

Teorem 7.2.4 R birimli ve değişmeli halka, M, R nin kendinden farklı bir ideali olsun. Mnin maksimal olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in R \setminus M$ için $M+(x)=R$ olmasıdır.

İspat: M, R nin maksimal ideali olsun.

$x \in R\setminus M \Rightarrow M \subsetneq M+(x) \subset R$ ve M maksimal olduğundan $M+(x)=R$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $\forall x \in R\setminus M$ için $M+(x)=R$ olsun. $I \subsetneq R$ için $M \subsetneq I$ olsaydı $\exists x \in I \setminus M$ bulunabilir ve kabulümüzden $R=M+(x) \subset I$ olurdu. Bu ise $I \subsetneq R$ aldığımız için bir çelişkidir. O halde $M=I$ olmalıdır.

Örnek 7.2.5 $\mathbb{Z}$ de $7\mathbb{Z}$ ideali maksimaldir. Çünki $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus 7\mathbb{Z}$ için $7\mathbb{Z} + (x) = \mathbb{Z}$ dir.

$(7, x) = 1$ olduğundan $7a + xb = 1$, $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ var.

$7\mathbb{Z} + (x) = (1) = \mathbb{Z}$ bulunur.

Teorem 7.2.6 R birimli ve değişmeli bir halka M, R'nin kendinden farklı bir ideali olsun. Mnin maksimal olması için gerek ve yeter şart R/M bölüm halkasının cisim olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M maksimal olsun. $M \neq R$ olduğundan $R/M \neq M$ dir. $\forall x + M \in R/M$ nin $(x + M \neq M)$ tersinin olduğunu göstermeliyiz. $x + M \neq M \Rightarrow x \in R \setminus M$

$M+(x)=R$ olup $m+ax=1$ olacak şekilde $\exists m\in M$ ve $\exists a\in R$ vardır. $m=1-ax\in M$ ve $(a+M)(x+M)=$ $ax+M=1+M$ den $(x+M)^{-1}=a+M$ bulunur.

($\Leftarrow$) R/M cisim olsun. $R/M\neq M$, $M\neq R$ dir.
$\forall x\in R\setminus M$ için $x+M\neq M$, R/M cisim olduğundan $(a+M)(x+M)=ax+M=1+M \Rightarrow 1-ax\in M$, $\exists a\in R$ vardır. $1\in M+(x) \Rightarrow M+(x)=R$ olup M maksimaldir.

Sonuç 7.2.7 Birimli ve değişmeli bir halkanın her maksimal ideali asaldır.

Örnek 7.2.8 $2\mathbb{Z}$ halkasında $4\mathbb{Z}$ ideali maksimal fakat asal değildir. Çünkü $2.2\in 4\mathbb{Z}$ fakat $2\notin 4\mathbb{Z}$ dir (halka birimli değil)

Örnek 7.2.9 $\mathbb{Z}\times\{0\}$ ideali $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ halkasının bir asal ideali fakat maksimal ideali değildir.

$\mathbb{Z}\times\{0\}\subset\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

KAYNAKLAR

1- Gallialp, F. Örneklerle Soyut Cebir, istanbul 2011

2- Arıkan, A Halıcıoğlu, S Cebire Giriş, Ankara 2015

3- Asar, A.O. Arıkan, A. Arıkan, A. Cebir Ankara 2009

4- Şenkon, H. Soyut Cebir Dersleri, istanbul 1993

5- Aydın, N. Kandamar, H. Soyut Cebir, istanbul 2015

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Cebir II

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 13