ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Cebir 2

Tamlık Bölgesinde Aritmetik

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 10

BÖLÜM 5

TAMLIK BÖLGESİNDE ARİTMETİK

Tanım 5.1 $a, b \in R$, $a = bc$ olacak şekilde $\exists c \in R$ varsa b' a'yı böler denir $b|a$ ile gösterilir. Aksi halde $b \nmid a$ şeklinde ifade edilir, b bölmez a şeklinde okunur.

Teorem 5.2 $\forall a, b, c \in R$ için

i) $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

ii) $a|b \Rightarrow \forall c \in R,\ a|bc$

iii) $a|b \wedge a|c \Rightarrow \forall x, y \in R,\ a|bx+cy$ dir

İspat: i-ii öğrenciye bırakılmıştır.

iii) $a|b \Rightarrow \forall x \in R,\ a|bx$ (ii) $a|c \Rightarrow \forall y \in R,\ a|cy$ (ii)

$\Rightarrow bx = at,\ cy = at',\ t, t' \in R$ var.

$\Rightarrow bx + cy = a(t+t') \Rightarrow a|bx+cy$ dir.

Tanım 5.3 $a, b \in R$ olsun. $b = au$ olacak şekilde $u \in U_R$ varsa a, b ile ilgilidir denir. ve $a \approx b$ ile gösterilir.

Teorem 5.4 R de ilgili olma bağıntısı denklik bağıntısıdır.

İspat: $\forall a \in R$ için $a = a.1_R$ olup $a \approx a$ dır.

$a \approx b \Rightarrow b = au \Rightarrow b.u^{-1} = a,\ u^{-1} \in U_R \Rightarrow b \approx a$ bulunur.

$a \approx b \wedge b \approx c \Rightarrow b = au,\ c = bv,\ u, v \in U_R$ var

$c = (au).v = a(uv)$, $u.v \in U_R$ olup $a \approx c$ bulunur.

Teorem 5.5 $a, b \in R$ olsun.

i) $a | b \Leftrightarrow (b) \subset (a)$

ii) $b \neq 0$, olsun $a | b \wedge b | a \Leftrightarrow a \approx b$ dir.

İspat: i) $a | b \Leftrightarrow b = at,\ \exists t \in R \Leftrightarrow b \in (a) \Leftrightarrow (b) \subset (a)$

ii) $a|b \wedge b|a \Longrightarrow b = au,\ a = bv,\ u, v \in R$ dir.

$b = (b.v).u \Longrightarrow b = b.(uv) \Longrightarrow 1 = u.v \Longrightarrow u, v \in U_R$

bulunur. $a \approx b$ dir.

$a \approx b \Longrightarrow b = au,\ \exists u \in U_R$ alb. $b = au \Longrightarrow$

$a = b.u^{-1},\ u^{-1} \in R \Longrightarrow b|a$ bulunur.

Tanım 5.6 $a, b \in R$ olsun.

i) $c|a,\ c|b,\ c \in R$

ii) $e|a,\ e|b$ için $e|c$ ise c elemanına

a ile b'nin en büyük ortak böleni denir.

(ebob)

Tanım 5.6 En büyük ortak bölenleri aritmetik birim olan elemanlara aralarında asaldırlar denir.

Teorem 5.7 Temel ideal Bölgesinde her ikiside sıfır olmayan her hangi iki elemanın bir ebob'u vardır.

İspat: R bir TİB olsun. $a, b \in R$, $I = (\{a,b\})$ olsun. Bu durumda $I = (\{a,b\}) = (c)$, $\exists c \in R$ vardır.
$a \neq 0$, $b \neq 0 \Rightarrow I = (c) \neq (0)$ dır. yani $c \neq 0$ dır.
$(a,b) = c$ olduğunu gösterelim. $a, b \in (c) \Rightarrow$
$a = cx$, $b = cy$, $\exists x, y \in R \Rightarrow c|a \wedge c|b$ dir.
$d|a \wedge d|b$, $d \in R$ için $I = \{ax + by \mid x, y \in R\} = (c)$ olduğundan $c = au + bv$, $u, v \in R$ vardır. $d|a \wedge d|b$
$\Rightarrow d \mid au + bv = c$ bulunur. O halde $c = (a,b)$ dir.

Tanım 5.8 $a \in R$, $a \notin U_R$ ve $a \neq 0_R$ olsun.

i) a nın aritmetik birimlerden ve ilgilerinden başka hiç bir böleni yoksa a elemanına R nin indirgenemez elemanı denir.

ii) $x, y \in R$ için $a \mid x.y \Rightarrow a \mid x \vee a \mid y$ ise $a \in R$ elemanına asal eleman denir.

Örnek 5.9 $\mathbb{Z}_6$ halkasının $\bar{3}$ elemanını alalım. $\mathbb{Z}_6$ da aritmetik birimler $\bar{1}, \bar{5}$ dir. $\bar{3} = \bar{3}.\bar{3}$ olup $\bar{3}$ indirgenemez eleman değildir. Fakat

$\bar{3} \mid \bar{a}.\bar{b} \Rightarrow \bar{a}\bar{b} = 3.\bar{c} \Rightarrow 6 \mid ab - 3c \Rightarrow 3 \mid 3c$ olduğundan $3 \mid ab$ olmalıdır. 3, $\mathbb{Z}$ de asal olduğundan $3 \mid a \vee 3 \mid b \Rightarrow \bar{3} \mid \bar{a} \vee \bar{3} \mid \bar{b}$ olup $\bar{3}$, $\mathbb{Z}_6$ asaldır.

Teorem 5.10 R Tamlık bölgesi $p \in R$ asal eleman olsun. Bu taktirde p indirgenemezdir.

İspat: $b, c \in R$ için $p = b.c$ olsun. b veya c nin aritmetik birim olduğunu göstermeliyiz. $p \mid bc$ ve p asal olduğundan $p \mid b \vee p \mid c$ dir. $p \mid b \Rightarrow b = p.q$ $\exists q \in R$ var. $p = bc = (p.q).c \Rightarrow p(1 - qc) = 0$ olup $1 - qc = 0$ olmalıdır $qc = 1 \Rightarrow c \in U_R$ dir. Benzer şekilde $p \mid c$ için $b \in U_R$ gösterilebilir, p indirgenemezdir.

Not: Teoremin tersi doğru değildir. ileride örnek verilecektir.

Teorem 5.11 R bir TİB olsun. Her indirgenemez elaman asaldır.

İspat: p indirgenemez ve $a,b \in R$ için $p|ab \Rightarrow p|a \vee p|b$ olduğunu göstermeliyiz. $p \nmid a$ olsun. (p,a) vardır. $(p,a)=c$ olsun. $c|p \wedge c|a$ olacağından, p nin asal olduğu dikkate alınırsa c'ya p ile ilgili yada aritmetik birimdir. $c \approx p$ olsa $c|a$ olduğundan $p|a$ çelişkisi elde edilir. O halde $c \in U_R \Rightarrow (p,a)=1$ olup $1 = xp + ya$, $\exists x,y \in R$. $b=(bx)p+(ab)y \Rightarrow p|p$ ve $p|ab \Rightarrow p|b$ elde edilir.

Not 5.12 TİB'de asallar ile indirgenemezler çakışır.

Tanım 5.13 Aşağıdaki şartları sağlayan bir R tamlık bölgesine tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölge denir. TAG ile gösterilir.

i) R deki sıfır ve aritmetik birimlerden farklı her eleman R'deki indirgenemez elemanların çarpımı olarak yazılır.

ii) Bu yazılış çarpanların sırası ve ilgililiği düşünülmeksizin tek türlüdür.

Teorem 5.14 R bir TİB ise TAG dır.

İspat: (Örneklerle Soyut Cebir Teorem 4.6.1)

Örnek 5.15 $\mathbb{Z}$ bir TAG dır.

Not: 5.16 TAG Bölgede asallar ile indirgenemez elemanlar çakışır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Şenol EREN

Cebir II

Ders 10