ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi
# Fen Edebiyat Fakültesi
# Matematik Bölümü
# Dijital Ders Platformu

## Cebir 2

## Kesir Cismi

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 8

**Teorem 2.2.11** Bir tamlık bölgesi, krakteristiği sıfır olan bir asal althalkaya sahipse $\mathbb{Z}$ye, krakteristiği $p$ olan bir asal althalkaya sahipse $\mathbb{Z}_p$'ye izomorf bir althalka kapsar.

**İspat:** $R$ bir TB olsun $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = n.1_R$ ile $f: \mathbb{Z} \longrightarrow R$ fonksiyonu bir homomorfizmadır.

Eğer $R$nin krakteristiği sıfır ise $\text{Çek}(f) = (0)$ olacağından $f$ 1-1 ve $\mathbb{Z} \cong f(\mathbb{Z}) \subseteq R$ dir.

Krak $R = p$ ise $\text{Çek}(f) = p\mathbb{Z}$ olup

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p \cong f(\mathbb{Z}) \subseteq R$ dir.

# BÖLÜM 3

## 3.1 KESİR CİSMİ

**Tanım 3.1.1** R ve S tamlık bölgeleri verildiğinde R'den S'ye 1-1 bir homomorfizma bulunabiliyorsa R, S içine gömülebilirdir denir yada S, R'nin bir genişlemesidir denir.

**Teorem 3.1.2** Bir R halkası birim elemanlı bir S halkası içine R' S'nin ideali olacak şekilde gömülebilir. R değişmeli ise S'de değişmelidir.

**İspat:** $S = R \times \mathbb{Z}$ olsun. $\forall a,b \in R$, $\forall m,n \in \mathbb{Z}$ için
$(a,m)+(b,n)=(a+b,\, m+n)$, $(a,m)\cdot(b,n)=(ab+na+mb,\, mn)$
şeklinde tanımlansın. $(S,+,\cdot)$ bir halkadır (neden?)
Burada $0_S=(0,0)$ $\quad 1_S=(0,1)$ dir.
$R\times\{0\} \subset S$ altkümesini alalım.
$(0,0)\in R\times\{0\} \Longrightarrow R\times\{0\}\neq\emptyset$ Ayrıca $R\times\{0\}$
S'nin bir althalkasıdır (neden?)
Bunun yanında $\forall (a,0)\in R\times\{0\}$ ve $\forall (c,n)\in S$ için
$(a,0)\cdot(c,n)$ ve $(c,n)\cdot(a,0)\in R\times\{0\}$ olup $R\times\{0\}$
S'nin bir idealidir. $\forall a\in R$ için $f(a)=(a,0)$
ile $f: R \longrightarrow R\times\{0\}$ fonksiyonu bir halka
homomorfizması olup 1-1 ve örtendir.
$R \cong R\times\{0\}$ olur.

R degişmeli olsun. $\forall (a,m),(b,n) \in S$ için

$$(a,m)\cdot(b,n) = (ab+na+mb,\ mn)$$
$$= (ba+mb+na,\ nm)$$
$$= (b,n)\cdot(a,m)$$ olup S'de degişmelidir.

**Teorem 3.1.3** Her tamlık bölgesi bir cisim içine gömülebilir.

**İspat:** $D$ bir T.B olsun. $D^* = D - \{0\}$ ile gösterelim. $D \times D^* = \{(a,b) \mid a,b \in D,\ b \neq 0\}$ kümesi üzerinde $(a,b), (c,d) \in D \times D^*$ için $(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$ bağıntısını tanımlayalım. $\sim$ $D \times D^*$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

i) $\forall (a,b) \in D \times D^*$ için $ab = ba$ olup $(a,b) \sim (a,b)$ dir.

ii) $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$ dir.

iii) $(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow ad = bc \wedge cf = de \Rightarrow$
$adf = bcf \wedge bcf = bde \Rightarrow adf = bde \Rightarrow daf = dbe$
$\Rightarrow af = be \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$ dir.

$\sim$ $D \times D^*$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

$(a,b)$ nin denklik sınıfı $\frac{a}{b}$ ile bütün denklik sınıflarının kümesini de $F$ ile gösterelim.

$F$ üzerinde $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F$ için $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ad+bc/_{bd}$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ile $+$ ve $\cdot$ işlemlerini tanımlayalım.

iddia $(F, +, \cdot)$ cisimdir. Önce bu işlemlerin iyi tanımlı olduklarını gösterelim. $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \wedge \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ olsun. $ab' = ba' \wedge cd' = dc' \Rightarrow ab'dd' = ba'dd'$ ve $cd'bb' = dc'bb' \Rightarrow ab'dd' + cd'bb' = ba'dd' + dc'bb'$

$\Rightarrow (ad+bc)b'd' = bd(a'd' + b'c') \Rightarrow (ad+bc, bd) \sim (a'd'+b'c', b'd')$

$\Rightarrow \frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$ bulunur.

Benzer şekilde $ab' = ba'$ ve $cd' = dc' \Longrightarrow$
$(ab')(cd') = (ba')(dc') \Longrightarrow (ac)(b'd') = (bd)(a'c') \Longrightarrow$
$(ac, bd) \sim (a'c', b'd') \Longrightarrow \dfrac{ac}{bd} = \dfrac{a'c'}{b'd'}$ den

$+$ ve $\cdot$ işlemleri iyi tanımlıdır.

Şimdi $(F,+,\cdot)$ cisim olduğunu gösterelim.

$(F,+)$ değişmeli gruptur. sıfırı $(0_D, 1_D)$ yani $\frac{0}{1}$ dir. $\frac{a}{b} \in F$ nin toplamsal tersi $-\frac{a}{b}$ dir. Birleşme ve değişme özellikleri de gösterilebilir.

$(F^*, \cdot)$ değişmeli gruptur. Birim eleman $\frac{1}{1}$ ayrıca $a, b \in D$ sıfırdan farklı elemanlar olmak üzere $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ dır.

Ayrıca çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği vardır, gösterelim. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in F$ için

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}\left(\frac{cf+de}{df}\right) = \frac{a(cf+de)}{bdf} = \frac{acf+ade}{bdf}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} = \frac{acf+ade}{bdf}$$

den eşitlik sağlanır.

**Tanım 3.1.4** Yukarıda teoremde varlığı gösterilen $F$ cismine $D$, T.B'nin kesir cismi denir.

**Örnek 3.1.5** $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının kesir cismi $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismidir.

**Örnek 3.1.6** $G=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ Gauss tam sayılar halkasının kesir cismini bulalım.

$$F=\left\{\frac{a+bi}{c+di} \;\middle|\; a+bi,\ c+di \in G,\ c+di\neq 0\right\}$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\overbrace{\frac{ac-bd}{c^2+d^2}}^{r}+\overbrace{\frac{bc+ad}{c^2+d^2}}^{s}i \;;\qquad F\subseteq\{r+si \mid r,s\in\mathbb{Q}\}$$

öte yandan $r+si\in F$ dir. O halde

$F=\{r+si \mid r,s\in\mathbb{Q}\}$ bulunur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi
# Fen Edebiyat Fakültesi
# Matematik Bölümü
# Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Şenol EREN

Cebir II

Ders 8