ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Cebir 2

İzomorfizma Teoremleri

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 7

2.2 İZOMORFİZMA TEOREMLERİ

Teorem 2.2.1 R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. $\forall a \in R$ için $\varphi(a) = a + I$ ile $\varphi : R \longrightarrow R/I$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda φ örten homomorfizmadır ve $\mathrm{Çek}\,\varphi = I$ dır.

İspat: $\forall a, b \in R$ için $\varphi(a+b) = (a+b)+I = (a+I)+(b+I)$

$$= \varphi(a) + \varphi(b)$$

$\varphi(a.b) = a.b + I = (a+I)(b+I) = \varphi(a).\varphi(b)$.

Örtenlik ve $\mathrm{Çek}\,\varphi = I$ olduğu aşikar.

Teorem 2.2.2 (Homomorfizma Teoremi) $f: R \longrightarrow S$ halka homomorfizması olsun. $R/_{Çekf} \cong f(R)$ dir.

İspat:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & f(R) \subseteq S \\ \varphi \downarrow & \nearrow_{\bar{f}} & \\ R/Çekf = I & & \end{array}$$

$\forall r+I \in R/_I$ için $\bar{f}(r+I) = f(r)$ ile $\bar{f}: R/_I \longrightarrow f(R)$ tanımlayalım.

$\bar{f}$ iyi tanımlıdır. $r+I = s+I \Rightarrow r-s \in I = Çekf$
$\Rightarrow f(r-s) = f(r) - f(s) = 0_S \Rightarrow f(r) = f(s)$

$\bar{f}$ örtendir. $\forall s = f(r) \in f(R)$ için $f(r) = \bar{f}(r+I)$ olacak şekilde $r+I \in R/_I$ vardır.

$\bar{f}$ 1-1 dir. $r+I,\ s+I \in R/_I$ için $\bar{f}(r+I) = \bar{f}(s+I) \Rightarrow f(r) = f(s) \Rightarrow$
$f(r) - f(s) = 0_S \Rightarrow f(r-s) = 0_S \Rightarrow r-s \in Çekf = I \Rightarrow$
$r+I = s+I$ bulunur.

$\bar{f}$ homomorfizmadır. $\forall r+I,\ s+I \in R/I$ için

$$\bar{f}[(r+I) \oplus (s+I)] = \bar{f}(r+s+I) = f(r+s) = f(r)+f(s)$$

$$= \bar{f}(r+I) + \bar{f}(s+I)$$

$$\bar{f}[(r+I) \odot (s+I)] = \bar{f}(r.s+I) = f(r.s) = f(r).f(s)$$

$$= \bar{f}(r+I).\bar{f}(s+I)$$

olup $\bar{f}$ izomorfizmadır.

Sonuç 2.2.3 $f: R \longrightarrow S$ bir homomorfizma ise $f = \bar{f} \circ \varphi$ olacak şekilde bir $\varphi: R \longrightarrow R/I$ örten homomorfizması ve bir $\bar{f}: R/I \longrightarrow f(R) = S$ izomorfizması vardır. Bu ayrışıma f nin doğal ayrışımı denir.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & S \\ R/I \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Sonuç 2.2.4 $f: R \longrightarrow S$ bir homomorfizma ise $f = \bar{f} \circ \varphi \circ i$ olacak şekilde bir $\varphi: R \longrightarrow R/I$ epimorfizması, bir $\bar{f}: R/I \longrightarrow f(R)$ izomorfizması ve bir $i: f(R) \longrightarrow S$ 1-1 homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & f(R) \arrow[r, "i"] & S \\ R/I \arrow[ur, "\bar{f}"'] & & \end{tikzcd}$$

Teorem 2.2.5 $f: R \longrightarrow S$ epimorfizma, I, R'nin $\text{Çek} f \subseteq I$ şartını sağlayan bir ideali ve φ ve φ' sırasıyla $\varphi: R \longrightarrow R/I$, $\varphi': S \longrightarrow S/f(I)$ epimorfizmalar olsun. Bu taktirde $\varphi' \circ f = h \circ \varphi$ şartını sağlayan bir tek $h: R/I \longrightarrow S/f(I)$ izomorfizması vardır.

İspat:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & S \arrow[d, "\varphi'"] \\ R/I \arrow[r, "h"] & S/f(I) \end{tikzcd}$$

Önce I, R'nin ideali iken $f(I)$'nın S'nin ideali olduğunu gösterelim.

$f(I)=\{s=f(a) \mid a\in I\}$ $\forall s_1,s_2\in f(I) \Rightarrow s_1=f(a_1), s_2=f(a_2)$,
$\exists a_1,a_2\in I$, $s_1-s_2=f(a_1)-f(a_2)=f(a_1-a_2)\in f(I)$
$(a_1-a_2\in I)$, $\forall k\in S$ ve $\forall s\in f(I)$ ise f örten olduğundan
$k=f(r)$, $s=f(a)$, $\exists r\in R$, $a\in I$ vardır.
$k.s=f(r).f(a)=f(ra)\in f(I)$, $(ra\in I)$
$s.k=f(a)f(r)=f(ar)\in f(I)$, $(ar\in I)$, $f(I)$, S'nin bir idealidir.

$\mathrm{Çek}(\varphi'\circ f)=I$ olduğunu gösterirsek Teorem 2.2.2'e göre tek bir $h: R/I \longrightarrow S/f(I)$ izomorfizması vardır.

$a \in I$ olsun. $(\varphi' \circ f)(a) = \varphi'(f(a)) = \varphi'\left(\frac{0_S}{f(I)}\right) = 0 + f(I) = f(I)$

olup $f(I) = \text{Çek}(\varphi')$ olur.

$a \in \text{Çek}(\varphi' \circ f)$ olup $I \subseteq \text{Çek}(\varphi' \circ f)$ bulunur (1)

$a \in \text{Çek}(\varphi' \circ f) \Rightarrow (\varphi' \circ f)(a) = \varphi'(f(a)) = f(I)$

$\Rightarrow f(a) \in \text{Çek}\,\varphi' = f(I) \Rightarrow f(a) = f(b)$, $\exists b \in I$ var.

$f(a) - f(b) = f(a-b) = 0_S \Rightarrow a - b \in \text{Çek}\, f \subseteq I$

$\Rightarrow a = (a-b) + b \in I \Rightarrow \text{Çek}(\varphi' \circ f) \subseteq I$ ... (2) bulunur.

1 ve 2 den $\text{Çek}(\varphi' \circ f) = I$ olur.

Homomorfizma teoremi gereği bir tek

h izomorfizması vardır.

Teorem 2.2.6 (1. izomorfizma Teoremi) R bir halka ve S'de bir althalkası olsun. I, R'nin bir ideali ise $S+I=\{s+a \mid s\in S, a\in I\}$ R nin I idealini kapsayan bir althalkasıdır. Ayrıca $S+I/_{I} \cong S/_{S\cap I}$ izomorfizması vardır.

İspat: $I \subset S+I$ aşikar. $S+I$'nın R nin althalkası olduğunu gösterelim. $\forall s_1+a_1, s_2+a_2 \in S+I$ için

$(s_1+a_1)-(s_2+a_2) = (s_1-s_2)+(a_1-a_2) \in S+I$

$(s_1+a_1)(s_2+a_2) = \underbrace{s_1s_2}_{\in S}+\underbrace{s_1a_2+a_1s_2+a_1a_2}_{\in I} \in S+I$ bulunur.

$\forall s\in S$ için $f(s)=s+I$ ile $f: S \longrightarrow R/_{I}$ fonksiyonunu tanımlayalım. f bir halka homomorfizmasıdır. (neden?) Ayrıca $f(S) = S+I/_{I}$ şimdi Çek f'i bulalım.

$s \in S$ için $s \in \text{Çek} f \iff f(s) = s+I = I \iff s \in I$ olduğundan $\text{Çek} f = S \cap I$ bulunur. Homomorfizma teoremi gereği $S/_{S\cap I} \cong S+I/_{I}$ bulunur.

Teorem 2.2.7 (2. İzomorfizma Teoremi) $f: R \longrightarrow S$ epimorfizma ve $\text{Çek} f = K$ olsun. S nin idealleriyle R'nin K'yı kapsayan idealleri arasında birebir eşleme yapılabilir. Bu eşleme S'nin bir I ideali verildiğinde I'ya R'nin K'yı kapsayan $J = \{x \in R \mid f(x) \in I\} = f^{-1}(I)$ idealini karşılık getirmekle yapılır. Bu taktirde

$$R/_{J} \cong S/_{I}$$ dır.

İspat: $f: R \longrightarrow S$, $f(R) = S$ ve $\text{Çek} f = K$ olsun. I, S'nin bir ideali ise $f^{-1}(I) = J$ de R'nin K'yı kapsayan bir ideali olduğunu gösterelim.
$\forall x, y \in f^{-1}(I)$ için $f(x), f(y) \in I$ olduğundan
$f(x-y) = f(x) - f(y) \in I \Longrightarrow x - y \in f^{-1}(I)$ ve
$\forall x \in f^{-1}(I)$ ve $\forall r \in R$ için
$f(rx) = f(r)f(x) \in I$, $f(xr) = f(x)f(r) \in I$ olup
$rx, xr \in f^{-1}(I)$ bulunur. Ayrıca
$K = \text{Çek} f = f^{-1}(0_S) \subset f^{-1}(I)$ dır. Şimdi
S'nin idealleriyle R'nin K'yı kapsayan idealleri arasında $I \longrightarrow f^{-1}(I)$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu gösterelim.

I_1 ve I_2 S'nin iki ideali ise $f^{-1}(I_1) = f^{-1}(I_2) \Rightarrow I_1 = I_2$ dir.
O halde tanım gereği fonksiyon birebirdir.
J, R'nin bir ideali ise $f(J)$ S'nin bir idealidir.

Şimdi J' R'nin Çekf$=K$'yı kapsayan bir ideali olsun. $f(J) = I$, S'nin bir ideali ve $f^{-1}(I) = f^{-1}(f(J)) = J$ olduğunu gösterirsek örtenlik gösterilmiş olur. $J \subset f^{-1}(f(J))$ Açık

$x \in f^{-1}(f(J)) \Longrightarrow f(x) \in f(J) \Rightarrow f(x) = f(a),\ \exists a \in J$

$\Longrightarrow f(x) - f(a) = f(x-a) = 0_S \Rightarrow x-a \in K \subset J \ (a \in J)$
$\Rightarrow x \in J$ olup $f^{-1}(f(J)) \subset J$ bulunur.

Şimdi I, S'nin bir ideali olmak üzere $f^{-1}(I)=J$ için $R/J \cong S/I$ olduğunu gösterelim.

$\varphi : R \longrightarrow S/I$, $\varphi(r)=f(r)+I$ şeklinde tanımlayalım. f örten olduğundan φ de örten homomorfizmadır. (neden?) $r\in R$ için

$r\in \text{Çek}\,\varphi \iff \varphi(r)=f(r)+I=I \iff f(r)\in I$

$\iff r\in f^{-1}(I)=J$ olduğundan

$\text{Çek}\,\varphi=J$ olup homomorfizma teoremi gereği $R/J \cong S/I$ bulunur.

Sonuç 2.2.8 I, R nin bir ideali ise R'nin I yı kapsayan ideallerİyle R/I nın idealleri arasında 1-1 eşleme vardır.

İspat: $\varphi: R \longrightarrow R/I$ doğal homomorfizması dikkate alınarak, yukarıdaki teoremden istenen elde edilir.

Örnek 2.2.9 $\mathbb{Z}_{10}$ halkasını düşünelim.

$\mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ halkasının idealleri

$(\bar{0}), (\bar{5}), (\bar{2}), \mathbb{Z}_{10}$ dır.

Tanım 2.2.10 Birimli bir halkanın, biriminin ürettiği althalkaya halkanın asal althalkası denir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Cebir II

Prof. Dr. Şenol EREN