ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Cebir 2

Bölüm Halkaları ve Halka Homomorfizmaları

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 6

Teorem 1.3.6 $n \in \mathbb{Z}$, $n>0$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

i) n asaldır

ii) $\mathbb{Z}/(n)$ Tamlık Bölgesidir.

iii) $\mathbb{Z}/(n)$ cisimdir.

İspat: $(i \Rightarrow ii)$ n asal olsun. $a+(n), b+(n) \in \mathbb{Z}/(n)$ için, $(a+(n))(b+(n)) = (n) \Rightarrow a.b+(n) = (n) \Rightarrow a.b \in (n) \Rightarrow a.b = n.r, r \in \mathbb{Z} \Rightarrow n|ab \Rightarrow n|a \vee n|b$ (n asal) $\Rightarrow a \in (n) \vee b \in (n) \Rightarrow a+(n) = (n) \vee b+(n) = (n)$ bulunur. $\mathbb{Z}/(n)$ sıfır bölensizdir. Ayrıca $\mathbb{Z}$ birimli ve değişmeli olduğundan $\mathbb{Z}/(n)$ de birimli ve değişmelidir. $\mathbb{Z}/(n)$ T.B dir.

(ii ⇒ iii): $\mathbb{Z}/(n)$ Sonlu tamlık bölgesi olup cisimdir. (Teorem 1.1.32)

(iii ⇒ i): $\mathbb{Z}/(n)$ cisim olsun. n asal olmasın. $1 < n_1, n_2 < n$ için $n = n_1 n_2$ dir. $n_1 + (n), n_2 + (n) \in \mathbb{Z}/(n)$ sıfırdan farklı elemanlardır.

$(n_1 + (n))(n_2 + (n)) = n_1 n_2 + (n) = n + (n) = (n)$ olup çelişki elde edilir. O halde n asaldır.

Tanım 1.3.7 I, R'nin bir ideali olsun. $a \in R$ için $a^m = 0_R$ olacak şekilde $\exists\, m \geq 1$ tam sayısı varsa a'ya nilpotent eleman denir. Bir I idealinin her elemanı nilpotent ise I'ya nil ideal denir. Bir n pozitif tam sayısı için $I^n = \{0\}$ ise I'ya nilpotent ideal denir.

Örnek 1.3.8 $\mathbb{Z}_8$ halkasında $I=\{\bar{0},\bar{4}\}$ ideali nilideal ayrıca nilpotent idealdir. $I^2=\{\bar{0}\}$ dir.

Teorem 1.3.9 R birimli ve değişmeli bir halka, I ve J iki nil ideal ise $I+J$'de nil idealdir.

İspat: I ve J ideal ise $I+J$ de idealdir.

A R'nin bütün nilpotent elemanlarının kümesi olsun. $I \subseteq A$, $J \subseteq A$ ve A'da ideal olduğundan $I+J \subseteq A$ olup A nil ideal olduğundan $I+J$ de nil idealdir.

BÖLÜM 2

2.1 HALKA YAPISINI KORUYAN DÖNÜŞÜMLER (HALKA HOMOMORFİZMALARI)

Tanım 2.1.1 R ve S iki halka $f: R \longrightarrow S$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a, b \in R$ için

i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

ii) $f(a.b) = f(a).f(b)$ ise f ye R den S'ye halka homomorfizması denir.

Not 2.1.2 i ve ii eşitliklerinde soldaki $+$ ve $\cdot$ işlemleri R de, sağdaki $+, \cdot$ işlemlerinin S deki işlemler olduğuna dikkat edelim.

Tanım 2.1.3 $f: R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun.

(i) f 1-1 ise monomorfizma

(ii) f örtense epimorfizma

iii) f 1-1 ve örtense izomorfizma

olarak adlandırılır. f R den S ye izomorfizma ise R ve S halkalarına izomorf halkalar denir $R \cong S$ ile gösterilir.

iv) Özel olarak $f: R \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} R$ homomorfizma ise f'ye otomorfizma adı verilir.

Teorem 2.1.4 R ve S iki halka $f: R \longrightarrow S$ halka homomorfizması olsun.

i) $f(0_R) = 0_S$

ii) $\forall a \in R$ için $f(-a) = -f(a)$ dır.

İspat: i) $0_R + 0_R = 0_R \Rightarrow f(0_R + 0_R) = f(0_R) \Rightarrow$
$f(0_R) + f(0_R) = f(0_R)$ olup $f(0_R) = 0_S$ bulunur.

ii) $\forall a \in R$ için $a + (-a) = 0_R$ dir.
$f(a + (-a)) = f(0_R) = 0_S \Longrightarrow f(a) + f(-a) = 0_S \Longrightarrow$
$f(-a) = -f(a)$ bulunur.

Örnek 2.1.5 $\forall a \in R$ için $f(a) = 0_S$ ile tanımlı $f: R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizmasıdır. (sıfır)

Örnek 2.1.6 $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n)=\bar{n}$ ile tanımlı $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ fonksiyonu bir halka homomorfizmasıdır. (neden?)

Teorem 2.1.7 $f: R \longrightarrow S$ örten bir halka homomorfizması olsun. i) U, R'nin althalkası ise $f(U)$ da S'nin althalkasıdır.

ii) R değişmeli ise S'de değişmelidir.

iii) R birimli ise S'de birimlidir.

iv) $a \in R$ birimsel ise $f(a) \in S$'de birimseldir.

İspat: i) $f(U)=\{x=f(a) \mid a \in U\}$

$\forall x,y \in f(U)$ ise $x=f(a)$, $y=f(b)$, $\exists a,b \in U$ vardır.
U althalka olduğundan $a-b \in U$, $a.b \in U$ dır.
$f(a-b)=f(a)-f(b)=x-y \in f(U)$
$f(a.b)=f(a).f(b)=x.y \in f(U)$ olup $f(U)$, S'nin althalkasıdır.

ii) $\forall x, y \in S$ için $f(R) = S$ olduğundan $x = f(a)$, $y = f(b)$, $\exists a, b \in R$ vardır.

$x.y = f(a) f(b) = f(ab) = f(ba) = f(b) f(a) = y.x$ dir.

iii) $\forall x \in S$ için $f(R) = S$ olup $x = f(a)$, $\exists a \in R$ vardır. R birimli olduğundan $a.1_R = 1_R a = a$ dır.

$x = f(a) = f(a.1_R) = f(a) f(1_R) = f(1_R a) = f(1_R) f(a)$ olup $f(1_R) = 1_S$ bulunur.

iv) $a \in R$ birimsel ise $a.\bar{a}' = \bar{a}'.a = 1_R$, $\bar{a}' \in R$ var

$f(a.\bar{a}') = f(a) f(\bar{a}') = f(\bar{a}'a) = f(\bar{a}').f(a) = f(1_R) = 1_S$

olup $f(a)$ terslenebilir ve $f(\bar{a}') = f(a)^{-1}$ dir.

Tanım 2.1.8 $f: R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. $\{a \in R \mid f(a) = 0_S\} = f^{-1}(0_S)$ kümesine f homomorfizmasının çekirdeği denir ve $\text{Çek} f$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.9 $\forall a \in \mathbb{Z}$ için $f(a) = \bar{a}$ ile tanımlı $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ bir halka homomorfizmasıdır.

$\text{Çek} f = \{ qm \mid q \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Örnek 2.1.10 Aşikar homomorfizmanın çekirdeği $\text{Çek} f = R$ dir.

Örnek 2.1.11 $\forall a \in \mathbb{Z}$ için $f(a) = (a, 0)$ ile tanımlı $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ fonksiyonu bir halka homomorfizmasıdır. Örten olmadığı için $f(1) = (1,0)$ olup $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nin birimi olan $(1,1)$ ile eşlenmez.

Örnek 2.1.12 $\mathbb{Z}$ halkasının $\mathbb{Q}$'ya izomorf olmadığını gösterelim. $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}$ olsun.

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ 1-1 ve örten bir homomorfizma vardır ve $f(1)=1$, $f(0)=0$ dır.

$n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow f(n) = f(\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ tane}}) = f(1)+\cdots+f(1) = n.f(1) = n$

$n \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow m>0$ olmak üzere $n=-m$ alabiliriz.

$f(n) = f(-m) = f((-1)+\cdots+(-1)) = -f(1)-\cdots-f(1)$

$= m.(-f(1)) = -m.f(1) = n$ olur. O halde

$\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n)=n$ bulunur. $0 = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ için

$\frac{a}{b} = f(n) = n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$

bulunamaz O halde $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Q}$ bulunur.

Ödev: 2.1.13 $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ ile $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ halkaları izomorf-mudur?

Yol gösterme: $f: \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ izo. olsun.
$3 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow f(3) = f((\sqrt{3})^2) = (f(\sqrt{3}))^2$ den
ve $f(1) = 1$ ayrıca $3 = f(\sqrt{3})^2 = (a+b\sqrt{5})^2$
düşün.

Teorem 2.1.14 $f: R \longrightarrow S$ halka homomorfizması olsun. Çekf R'nin bir idealidir.

İspat:

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Cebir II

Prof. Dr. Şenol EREN