ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik II
Doğal Sayılar

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 2

SAYI SİSTEMLERİ

Doğal Sayılar

Doğal sayıların neler olduğunu sezgisel anlamda biliyoruz. Diğer bütün sayı sistemleri (tamsayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar) doğal sayılar yardımıyla inşa edilir. İlk bir kaç sayıyı aşağıdaki şekilde oluşturalım.

$$0=\emptyset, \quad 1=\{0\}, \quad 2=\{0,1\}, \quad 3=\{0,1,2\}, \ldots$$

Buradan $0=\emptyset$, $1=0\cup\{0\}$, $2=1\cup\{1\}$, $3=2\cup\{2\}, \ldots$ şeklinde yazabiliriz. Tüm doğal sayıları bu şekilde yazmak yeterli değildir. Yukarıda ilk doğal sayının $\emptyset$ ve $n\neq 0$ doğal sayısı için bundan sonra gelen ilk doğal sayının $n\cup\{n\}$ olduğu görülmektedir.

Tanım: A bir küme olsun. $A \cup \{A\} = A^+$ şeklinde tanımlanan A^+ kümesine A nın <u>ardışığı</u> denir. Bu tanım altından yukarıdaki doğal sayıları

$$0 = \emptyset, \quad 1 = 0^+, \quad 2 = 1^+, \quad 3 = 2^+, \ldots$$

şeklinde ifade etmek mümkündür.

Tanım: $\emptyset \in X$ ve $\forall A \in X$ için $A^+ \in X$ şartını sağlayan X kümesine <u>ardıllı küme</u> denir.

Sonsuzluk Aksiyomu: Bir ardıllı küme vardır.

Önerme: Tüm ardıllı kümelerin kesişimi yine bir ardıllı kümedir.

İspat: $\mathcal{A} = \{A : A \text{ ardıllı küme}\}$ olsun. $\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{A}$ diyelim.

Sonsuzluk aksiyomu gereği $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

- $\emptyset \in \mathbb{N}$ mi?

  $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\emptyset \in A$ olduğundan $\emptyset \in \mathbb{N}$ dir.

- $\forall B \in \mathbb{N}$ için $B^+ \in \mathbb{N}$ mi?

  $\forall A \in \mathcal{A}$ için $B \in A$ dolayısıyla $B^+ \in A$ dır.

  $\Rightarrow B^+ \in \cap\mathcal{A}$

  $\Rightarrow B^+ \in \mathbb{N}$

$\therefore$ $\mathbb{N}$ ardıllı kümedir.

Tanım: Tüm ardıllı kümelerin kesişimi olan $\mathbb{N}$ kümesine <u>doğal sayılar kümesi</u> denir. Elemanlarına da <u>doğal sayı</u> denir.

Teorem: (Peano Aksiyomları)

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{N}$
3. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \neq 0$

4. $A \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $0 \in A$ ve $\forall n \in A$ için $n^+ \in A \Rightarrow A = \mathbb{N}$
(Tümevarım ilkesi)

5. $m, n \in \mathbb{N}$ için $m^+ = n^+ \Longrightarrow m = n$

İspat: 1) $\mathbb{N}$ nin tanımından $0 \in \mathbb{N}$ dir.
2) $\mathbb{N}$ nin tanımından $n \in \mathbb{N}$ ise $n^+ = n \cup \{n\}$ olup $n^+ \in \mathbb{N}$ dir.
3) $n \in \mathbb{N}$ olsun. $n^+ = n \cup \{n\}$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n \in n^+$ dır.
$0 = \emptyset$ olarak tanımlandığından $n \in 0$ olamaz.
$\therefore n^+ \neq 0$
4) A ardıllı bir kümedir. Dolayısıyla $\mathbb{N} \subseteq A$ olup $A = \mathbb{N}$ dir.

Ön teorem: $n \in \mathbb{N}$ ve $m \in n \Rightarrow m \subseteq n$ dir.

5) $m, n \in \mathbb{N}$ için $m^+ = n^+$ olsun.
$n \in n^+ \Rightarrow n \in m^+ = m \cup \{m\}$
$\Rightarrow n \in m \vee n = m$

$$m \in m^+ \Rightarrow m \in n^+ = n \cup \{n\}$$
$$\Rightarrow m \in n \vee n = m$$

- $m=n$ ise ispat biter
- $m \neq n$ olsun.

$$\Rightarrow n \in m \wedge m \in n$$
$$\Rightarrow n \subseteq m \wedge m \subseteq n$$
$$\Rightarrow n = m \quad (\text{çelişki; } m \neq n \text{ idi})$$

$$\therefore m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$$

Teorem: Her bir $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$m \leq n \Leftrightarrow m \in n \vee m = n$$

olmasıdır. Bu durumda $(\mathbb{N}, \leq)$ bir kısmi sıralı kümedir.

İspat: i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n = n \Rightarrow n \leq n$ olup yansıma özelliği sağlanır.

ii) $m,n \in \mathbb{N}$ için $m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$ mi?

$$m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m \in n \vee m = n \quad \wedge$$
$$n \in m \vee m = n$$

$m = n$ ise ispat biter

$m \neq n$ olsun. $\Rightarrow m \in n \wedge n \in m$

$\Rightarrow m \subseteq n \wedge n \subseteq m$

$\Rightarrow m = n$ (çelişki)

$\therefore m = n$ dir.

iii) $m,n,k \in \mathbb{N}$ için $m \leq n \wedge n \leq k \Rightarrow m \leq k$ mı?

$$m \leq n \wedge n \leq k \Rightarrow m \in n \vee m = n \wedge n \in k \vee n = k$$

- $m \in n \wedge n \in k \Rightarrow m \in k \Rightarrow m \leq k$
- $m = n \wedge n \in k \Rightarrow m \in k \Rightarrow m \leq k$
- $m \in n \wedge n = k \Rightarrow m \in k \Rightarrow m \leq k$
- $m = n \wedge n = k \Rightarrow m = k \Rightarrow m \leq k$

$\therefore (\mathbb{N}, \leq)$ bir kısmi sıralı kümedir.

Önerme: $m \in \mathbb{N}$ ise $0 \leq m$ dir.

İspat: P kümesini $P = \{ m \in \mathbb{N} : 0 \leq m \} \subseteq \mathbb{N}$ şeklinde tanımlayalım.

$P = \mathbb{N}$ mi?

- $0 \in P$ mi?

  $0 \leq 0$ olup $0 \in P$ dir.

- $\forall m \in P$ için $m^+ \in P$ mi?

$$\left.\begin{array}{l} m \in P \Rightarrow 0 \leq m \\ m \in m^+ \Rightarrow m \leq m^+ \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq m^+$$

$$\Rightarrow m^+ \in P$$

$$\therefore P = \mathbb{N}$$

Önerme: $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m < n \Rightarrow m^+ \leq n$ dir.

İspat: $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $P_m = \{ n \in \mathbb{N} : m < n \Rightarrow m^+ \leq n \}$ olsun.

$P_m = \mathbb{N}$ mi?

- $0 \in P_m$ mi?

  $m < 0 \Rightarrow m^+ \leq 0$ önermesi doğru olduğundan $0 \in P_m$ dir.

- $\forall n \in P_m$ için $n^+ \in P_m$ mi?

  $\left(n^+ \in P_m \overset{?}{\Longleftrightarrow} m < n^+ \Rightarrow m^+ \leq n^+ \right)$

  $n \in P_m \Longrightarrow m < n \Longrightarrow m^+ \leq n$ dir.

  $m < n^+$ olsun.

  $\Longrightarrow m \in n^+$

  $\Longrightarrow m \in n \lor m = n$

$$\left.\begin{array}{l} m = n \Rightarrow m^+ = n^+ \Rightarrow m^+ \leq n^+ \\ m \in n \Rightarrow m < n \\ \qquad \Rightarrow m^+ \leq n \text{ ve } n \in n^+ \\ \qquad \Rightarrow m^+ \leq n^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow n^+ \in P_m$$

$\therefore P_m = \mathbb{N}$

Tanım: (İyi Sıralı Küme)

Boştan farklı her alt kümesinin bir EKE'si olan kümeye <u>iyi sıralı küme</u> denir.

Teorem: $(\mathbb{N}, \leq)$ bir iyi sıralı kümedir.

İspat: $\mathbb{N}$ iyi sıralı küme olmasın. Bu durumda

$\exists A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ EKE(A) yoktur.

$X = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in A$ için $n \leq m\}$ kümesini tanımlayalım.

$X = \mathbb{N}$ mi?

- $0 \in X$ mi?

  $m \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq m$ bilgisinden $0 \in X$ dir.

- $\forall n \in X$ için $n^+ \in X$ mi?

  $n \in X \Rightarrow \forall m \in A$ için $n \leq m$

$n \in A$ olamaz. $n \in A$ olsaydı $n = $ EKE(A) olurdu. O halde

$\forall m \in A$ için $n < m \Rightarrow n^+ \leq m$

$\Rightarrow n^+ \in X$

$\therefore X = \mathbb{N}$ çelişki

A nın en küçük elemanı olmadığından

$A \cap X = \emptyset \Rightarrow A \cap \mathbb{N} = \emptyset$

$\Rightarrow A = \emptyset$

elde edilir. Oysa $A \neq \emptyset$ idi.

$\therefore$ EKE(A) vardır.

$\therefore (\mathbb{N}, \leq)$ iyi sıralı kümedir.

Teorem: (Yineleme Teoremi)

A kümesi $f: A \longrightarrow A$ fonksiyonu ve $a \in A$ verilmiş olsun. Bu durumda

i) $g(0) = c$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $g(n^+) = f(g(n))$ olacak şekilde bir ve yalnızca bir $g: \mathbb{N} \longrightarrow A$ fonksiyonu vardır.

Tanım: $m \in \mathbb{N}$ için

i) $t_m(0) = m$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_m(n^+) = (t_m(n))^+$

koşullarını gerçekleyen bir ve yalnızca bir $t_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu vardır. $t_m(n) = m+n$ ifadesine m ile n nin toplamı denir.

i) den $m + 0 = m$
ii) den $m + n^+ = (m+n)^+$

Önerme: (Toplamanın Özellikleri)

$\forall m, n, p \in \mathbb{N}$ için

i) $0 + m = m$

ii) $(m+n)+p = m+(n+p)$

iii) $m+n = n+m$

iv) $m+p = n+p \Rightarrow m = n$

i) $S_1 = \{ m \in \mathbb{N} : 0 + m = m \} \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $S_1 = \mathbb{N}$ mi?

- $0 \in S_1$ mi?

  $0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 \in S_1$

- $\forall m \in S_1$ için $m^+ \in S_1$ mi?

  $\forall m \in S_1 \Rightarrow 0 + m = m$

  $$0 + m^+ = (0+m)^+ = m^+$$

  $\therefore S_1 = \mathbb{N}$

ii) $S_2 = \{ p \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N}$ için $(m+n)+p = m+(n+p) \} \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $S_2 = \mathbb{N}$ mi?

- $0 \in S_2$ mi?

  $$\left.\begin{array}{l} m+n = m+(n+0) \\ m+n = (m+n)+0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \in S_2$$

- $\forall p \in S_2$ için $p^+ \in S_2$ mi?

  $p \in S_2 \Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}$ için $(m+n)+p = m+(n+p)$

$p^+ \in S_2 \overset{?}{\Longleftrightarrow} \forall m,n \in \mathbb{N}$ için $(m+n)+p^+ = m+(n+p^+)$

$$\begin{aligned}(m+n)+p^+ &= ((m+n)+p)^+ \\ &\underset{p\in S_2}{=} (m+(n+p))^+ \\ &= m+(n+p)^+ \\ &= m+(n+p^+)\end{aligned}$$

$\therefore S_2 = \mathbb{N}$

$\therefore \forall m,n,p \in \mathbb{N}$ için $(m+n)+p = m+(n+p)$ dir.

(iii) ve (iv) benzer şekilde yapılır.

Tanım: $m \in \mathbb{N}$ için

i) $G_m(0) = 0$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $G_m(n^+) = G_m(n) + m$

koşullarını sağlayan bir ve yalnızca bir $G_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu vardır. $G_m(n) = m.n$ ifadesine m ile n nin <u>çarpımı</u> denir.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{i) den } \; m.0 = 0 \\ \text{ii) den } \; m.n^+ = mn + m \end{array}}$$

elde edilir.

Önerme: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0.n = 0$ dır.

İspat: $A = \{n \in \mathbb{N} : 0.n = 0\} \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$A = \mathbb{N}$ mi?

- $0 \in A$ mı?

  $0.0 = 0 \Rightarrow 0 \in A$

- $\forall n \in A$ için $n^+ \in A$ mı?

$n \in A \Rightarrow 0 \cdot n = 0$

$n^+ \in A \overset{?}{\Longleftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \cdot n^+ = 0$

$$
\begin{aligned}
0n^+ &= 0n + 0 \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore A = \mathbb{N}$

Önerme: $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$ için

i) $1n = n$

ii) $m(n+p) = mn + mp$

iii) $(m+n)p = mp + np$

iv) $(mn)p = m(np)$

v) $mn = nm$

İspat: i) $A_1 = \{n \in \mathbb{N} : 1n = n\} \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$R_1 = \mathbb{N}$ mi?

- $0 \in R_1$ mi?

  $1.0 = 0 \Rightarrow 0 \in R_1$

- $\forall n \in R_1$ için $n^+ \in R_1$ mi?

  $n \in R_1 \Longrightarrow 1n = n$

  $n^+ \in R_1 \overset{?}{\Longleftrightarrow} 1.n^+ = n^+$

  $1.n^+ = 1.n + 1$

  $\quad = n + 1 = n^+$

  $\therefore R_1 = \mathbb{N}$

ii) $R_2 = \{ p \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N}$ için $m(n+p) = mn + mp \} \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$R_2 = \mathbb{N}$ mi?

- $0 \in R_2$ mi?

$$\left.\begin{array}{l} mn = m(n+0) \\ mn = mn + 0 \\ \quad = mn + m.0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow m(n+0) = mn + m0 \\ \Rightarrow 0 \in R_2 \end{array}$$

- $\forall p \in \ell_2$ için $p^+ \in \ell_2$ mi?

$p \in \ell_2 \Longrightarrow \forall m,n \in \mathbb{N}$ için $m(n+p) = mn + mp$

$p^+ \in \ell_2 \overset{?}{\Longleftrightarrow} \forall m,n \in \mathbb{N}$ için $m(n+p^+) = mn + mp^+$

$$
\begin{aligned}
m(n+p^+) &= m(n+p)^+ \\
&= m(n+p) + m \\
&= mn + mp + m \\
&= mn + (mp + m) \\
&= mn + mp^+
\end{aligned}
$$

$\therefore \ \ell_2 = \mathbb{N}$

Digerleri de benzer sekilde yapılır.

NOT: * $m,n \in \mathbb{N}$ olsun.

$m > n \Longleftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}^* \ni m = n + p$ olmasıdır.

* $m > n \Longleftrightarrow n < m$

* $m<n$ veya $m=n \Longrightarrow m\leq n$
* $n<n^+$ ve $0\leq n$
* $m=n$, $m<n$, $n<m$ durumlarından sadece bir tanesi geçerlidir (üç hal kuralı).

Önerme : $\forall\, m,n,p\in\mathbb{N}$ olsun.

i) $m\leq n \Longleftrightarrow m+p\leq n+p$

ii) $m\leq n \Longleftrightarrow mp\leq np$

iii) $0<p \wedge m<n \Longrightarrow mp<np$

iv) $p\leq m\leq p^+ \Longrightarrow m=p$ ya da $m=p^+$

İspat : i) $A=\{p\in\mathbb{N} : \forall\, m,n\in\mathbb{N}$ için $m\leq n \Longleftrightarrow m+p\leq n+p\}\subseteq\mathbb{N}$ olsun. $A=\mathbb{N}$ mi?

- $0\in A$ mı?

$$m\leq n \Longleftrightarrow m+0\leq n+0$$

$$\Longrightarrow 0\in A$$

- $\forall p \in A$ için $p^+ \in A$ mı?

$p \in A \Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}$ için $m \leq n \Leftrightarrow m+p \leq n+p$

$p^+ \in A \overset{?}{\Leftrightarrow} \forall m, n \in \mathbb{N}$ için $m \leq n \Leftrightarrow m+p^+ \leq n+p^+$

$$\begin{aligned} m \leq n &\Leftrightarrow m+p \leq n+p \\ &\Leftrightarrow (m+p)^+ \leq (n+p)^+ \\ &\Leftrightarrow m+p^+ \leq n+p^+ \end{aligned}$$

$\therefore A = \mathbb{N}$

(ii) ve (iii) benzer şekilde yapılır.

iv) $p \leq m \leq p^+$, $p \neq m$ olsun.

$\Rightarrow p < m$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \ni m = p+k$

$k=1$ ise $m=p+1 \Rightarrow m=p^+$

$k\neq 1$ olsun.

$\Rightarrow \exists s\in \mathbb{N}^* \ni k=s^+$

$m=p+k = p+s^+$

$= (p+s)^+ = (s+p)^+ = s+p^+$

$\Rightarrow \exists s\in \mathbb{N}^* \ni m=s+p^+$

$\Rightarrow p^+ < m$ (çelişki $m\leq p^+$ idi)

$\therefore k\neq 1$ olamaz

$\Rightarrow k=1$

$\Rightarrow m=p+1=p^+$

Önerme: i) $\mathbb{N}^*$ için tümevarım

ii) $S\subseteq \mathbb{N}^*$, $1\in S$ olsun. $\forall m<n$, $m\in S$ için $n\in S$ ise $S=\mathbb{N}^*$ (2. tümevarım)

iii) $\mathbb{N}^*$ iyi sıralıdır.

ifadeleri birbirine denktir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik

Teşekkürler

Dr. Öğr. Gör. Abdullah DERTLİ