ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi
# Fen Edebiyat Fakültesi
# Matematik Bölümü
# Dijital Ders Platformu

## Soyut Matematik II
## Kafesler

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 1

# KAFESLER

**Tanım:** $(A, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in A$ için $Sup\{x,y\}$, $Inf\{x,y\}$ mevcutsa $A$ ya bir <u>kafes</u> (latis) denir.

Ayrıca

$$Sup\{x,y\} = x \vee y$$
$$Inf\{x,y\} = x \wedge y$$

ile gösterilir.

Bu taktirde aşağıdakiler geçerlidir.

$\forall x, y \in A$ için

i) $x \leq x \vee y \quad , \quad y \leq x \vee y$

ii) $x \leq y \wedge z \leq y \Rightarrow x \vee z \leq y$

iii) $x \wedge y \leq x \quad , \quad x \wedge y \leq y$

iv) $x \leq y \wedge x \leq z \Rightarrow x \leq y \wedge z$

**Örnek:** Tanımda verilen A yerine $\mathbb{Z}$ alınırsa $(\mathbb{Z}, \leq)$ bir kafestir. $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için $a \leq b$ verildiğinde $a \vee b = b$, $a \wedge b = a$ olup $\mathbb{Z}$ bir kafestir.

**Örnek:** $A \neq \emptyset$ olmak üzere $(2^A, \subseteq)$ bir kafestir.
$A_1, A_2 \in 2^A$ olsun.

$$A_1 \vee A_2 = A_1 \cup A_2$$
$$A_1 \wedge A_2 = A_1 \cap A_2$$

alınırsa $2^A$ kümesinin kafes olduğu görülür.

**Önerme:** $(A, \leq)$ bir kafes olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler verilebilir.

$\forall\, x, y, z \in A$ için

i) $x \vee x = x$ 　　 i') $x \wedge x = x$

ii) $x \vee y = y \vee x$ 　　 ii') $x \wedge y = y \wedge x$

iii) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ 　　 iii') $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

iv) $(x \vee y) \wedge x = x$ 　　 iv') $(x \wedge y) \vee x = x$

**Tanım:** $(A, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $\vee$, $\wedge$, $A$ üzerinde bir ikili işlemdir. Bu işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\vee : A \times A \longrightarrow A \qquad \wedge : A \times A \longrightarrow A$$
$$(x, y) \longmapsto x \vee y \qquad (x, y) \longmapsto x \wedge y$$

**Tanım:** $(A, \leq)$ bir kafes, $B \neq \emptyset$, $B \subseteq A$ olsun. Her $x, y \in B$ için $x \vee y \in B$ ve $x \wedge y \in B$ ise $B$ ye $A$ nın <u>alt kafesi</u> denir.

**Örnek:** $(\mathbb{R}, \leq)$ bir kafestir. $\mathbb{R}$ nin boş olmayan her alt kümesi $\mathbb{R}$ nin bir alt kafesidir.

**Örnek:** $A \neq \emptyset$, $(2^A, \subseteq)$ bir kafestir. $2^A$ nın boştan farklı her alt kümesi bir alt kafestir.

**Tanım:** $(A, \leq)$ bir kafes olsun.

i) $\exists\, 0 \in A$, $\exists\, 1 \in A$ olmak üzere $\forall\, x \in A$ için

$$x \vee 0 = x \qquad x \wedge 1 = x$$

ii) $\forall\, x \in A$ için $\exists\, x' \in A \ni x \vee x' = 1$, $x \wedge x' = 0$

iii) $\forall\, x, y, z \in A$ için

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

özelliklerini sağlayan $(A, \leq)$ ikilisine <u>Boole cebiri</u> denir.

Burada $x'$ ne $x$ in tamlayanı, (iii) deki özelliğe dağılma özelliği denir. Tüm elemanlarının tamlayanı mevcut olan kafese <u>tamlanmış kafes</u>; dağılma özelliğini sağlayan kafese de dağılmalı kafes denir.

**Örnek:** $A \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $(P(A), \cup, \cap)$ bir Boole cebiridir.

$$0 := \emptyset, \quad 1 := A \quad A' := A^t$$

- $B \in P(A) \Rightarrow B \cup \emptyset = B, \quad B \cap A = B$
- $B \cup B^t = A, \quad B \cap B^t = \emptyset$
- $\cup$ nin $\cap$ üzerine, $\cap$ nin $\cup$ üzerine dağılma özelliği olduğundan iii de sağlanır.

$$\therefore \ (P(A), \cup, \cap) \text{ bir Boole cebiridir.}$$

**Örnek:** Önermeler cebirinde tüm önermelerin kümesini $R$ ile gösterelim. $(R, \vee, \wedge)$ bir Boole cebiridir.

$$0 := Y \qquad x' := \sim x$$
$$1 := D$$

alınırsa istenilen elde edilir.

**Örnek:** A bir kafes ve $a \leq b$ ise $\forall x \in A$ için

$$a \vee x \leq b \vee x$$

olduğunu gösteriniz.

A bir kafes olduğundan her hangi iki elemanın supremumu vardır. $c = \sup\{b, x\} = b \vee x$ olsun.

$$b \leq c \text{ ve } x \leq c \Longrightarrow a \leq c \text{ ve } x \leq c$$
$$(a \leq b)$$

olduğundan, supremum tanımından

$$\sup\{a, x\} = a \vee x \leq c = b \vee x$$

elde edilir.

$$\therefore a \vee x \leq b \vee x$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi
# Fen Edebiyat Fakültesi
# Matematik Bölümü
# Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik

Teşekkürler

Dr. Öğr. Gör. Abdullah DERTLİ