ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Cebir 2
Alt Halka ve İdealler

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 4

1.2 ALT HALKA VE İDEALLER

Tanım 1.2.1. R bir halka ve $\phi \neq S \subset R$ olsun. R deki işlemlere göre S alt kümesi kendi başına bir halka ise S'ye R'nin althalkası denir.

Örnek 1.2.2 $\{0_R\}$ ve R, R'nin althalkalarıdır. Bunlara R'nin aşikar althalkaları denir. Bunlardan farklı althalkalara öz (has) althalka denir.

Örnek 1.2.3 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$'nun $\mathbb{Q}$'da $\mathbb{R}$'nin birer öz althalkasıdır.

Örnek 1.2.4 Çift tam sayılar kümesi E, $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının birim elemansız bir althalkasıdır.

Örnek 1.2.5 $E_8 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ $\mathbb{Z}_8$ halkasının bir öz althalkasıdır.

Teorem 1.2.6 R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olsun. S'nin R'nin althalkası olması için gerek ve yeter şart $\forall a,b \in S$ için $a-b \in S$ ve $a.b \in S$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) S' R nin althalkası ise S kendi başına halka olduğundan $\forall a,b \in S$ için $a-b \in S$ ve $a.b \in S$ dir.

($\Leftarrow$) $\forall a,b \in S$ iken $a-b \in S$ ve $a.b \in S$ olsun. $\forall a,b \in S$ için $a-b \in S$ olduğundan $(S,+) \leq (R,+)$ dır. H1 sağlanır. S'de çarpma işlemi kapalı olduğundan ve Halka aksiyomlarından H2 ve H3 R deki tüm elemanlar için sağlandığından S içinde sağlanır.

Örnek 1.2.7 $M_2(E) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \middle| \; x, y, z, t \in E \right\}$ (E: çift tam sayılar kümesi)

$$M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$ kümesinin

altkümesidir. Ayrıca althalkasıdır.

Teorem 1.2.8 Bir halkanın bir takım althalkalarının arakesitide bir althalkadır.

İspat: $H=(H_i)_{i\in I}$ ailesi R nin althalkalarının bir ailesi olsun.

$\forall a,b\in H$ için $\forall i\in I$, $a,b\in H_i$ ve H_i'ler althalka olduğundan $\forall i\in I$ için $a-b\in H_i$ ve $a.b\in H_i$ dir. Buda arakesit tanımından $a-b\in H$, $a.b\in H$ bulunur.

Örnek 1.2.9 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ üzerinde $\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ için

$(a,b)+(c,d) = (a+c,\, b+d)$, $(a,b)\cdot(c,d) = (a.c,\, b.d)$

işlemleri tanımlanıyor. $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bir halkadır. (gösteriniz) Ayrıca $R=\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid a\equiv b \pmod 3\}$ kümesi $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ halkasının bir althalkasıdır.

Tanım 1.2.10 A, R halkasının bir altkümesi olsun. R'nin A'yı kapsayan bütün althalkalarının arakesitine A'nın ürettiği althalka denir. $\langle A \rangle$ ile gösterilir. A'nın elemanlarına $\langle A \rangle$ nın üreteçleri denir.

$\langle A \rangle$ nın tanımından A'yı kapsayan en küçük althalkadır. $A = \emptyset$ ise $\langle A \rangle$ sıfır halkadır.

Tanım 1.2.11 R bir halka $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun.

i) $\forall a,b \in I$ için $a-b \in I$

ii) $\forall a \in I$, $\forall r \in R$ için $ra \in I$, $ar \in I$ ise I'ya R'nin bir sol ideali, sağ ideali denir. Her ikiside sağlanıyorsa I'ya R'nin ideali denir.

Tanımdan ideal bir althalkadır fakat tersi doğru degildir. Ayrıca halka degişmeli ise her sol veya sağ ideal bir idealdir.

Örnek 1.2.12 $\{0_R\}$ ve R, R halkasının iki idealidir. Bunlara R'nin aşikar idealleri denir. Varsa bunların dışındaki ideallere ise R'nin öz (has) idealleri denir.

Örnek 1.2.13 $M_2(\mathbb{Z})$ halkası için

$I_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Z} \right\}$, $I_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

$I_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \ a, b, c, d \text{ çift tam sayı} \right\}$, $I_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \ a \in \mathbb{Z} \right\}$

veriliyor. I_1 sol ideal, I_2 sağ ideal, I_3 ideal I_4 althalka (ideal değil) gösteriniz.

Teorem 1.2.14 Bir R halkasının bir takım ideallerinin kesişimi de R nin bir idealidir.

İspat: Öğrenciye bırakılmıştır.

Örnek: 1.2.15 I ve J değişmeli bir R halkasının iki ideali ise $A=\{r\in R \mid ha\in I \ (\forall a\in J \text{ için})\}$ kümeside R'nin bir idealidir.

Tanım 1.2.16 A, R halkasının bir altkümesi olsun. R'nin A'yı kapsayan bütün ideallerinin kesişimine A'nın ürettiği ideal denir ve (A) ile gösterilir. $A=\{a\}$ tek elemanlı bir küme ise A'nın ürettiği ideale temel ideal denir ve (a) ile gösterilir. Eğer $A=\phi$ ise $(A)=(0)$ olur. (A)'nın tanımından A'yı kapsayan en küçük idealdir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Şenol EREN

Cebir II

Ders 4