



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler II

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA

Ders 5

1.4. Sabit Katsayılı Homojen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde n . mertebeden homojen olmayan

$$L(D)y = (D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1} D + p_n)y = B(x)$$

sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin özel ve genel çözümleri için yöntemler vereceğiz.

$L(D)y = 0$ homojen denklemin genel çözümleri y_h olmak üzere

$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$ olduğu önceki bölümde gösterildi.

$L(D)y = B(x)$ homojen olmayan denklemin sabit içermeyen bir özel çözümleri y_0 olmak üzere homojen olmayan denklemin genel çözümleri $y = y_h + y_0 = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_0$ şeklinde olacaktır. Önceki bölümlerde ifade edilmiştir. Yine

$L(D)y = B_1(x) + B_2(x) + \dots + B_k(x)$ formunda ise $L(D)y = B_i(x)$ denklemlerinden

ayrı ayrı y_{0i} özel çözümleri bulunup $y_0 = y_{01} + y_{02} + \dots + y_{0k}$ olarak yazılabilir. İfade edilmiştir.

$\ell(D)y = B(x)$ denkleminin $y_0 = v(x)$ özel çözümünü bulmak için

- 1) Belirsiz katsayılar yöntemi
 - 2) Ops operatörler yöntemi
 - 3) Parametrelerin değişimi yöntemi
- yöntemlerini vereceğiz.

14.1. Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Bu yöntem $\ell(D)y = B(x)$ denleminde $B(x)$ fonksiyonunun $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x^n, e^{ax}, \sin(bx+c), \cos(bx+c)$$

fonksiyonlarından biri ile tanımlı veya bunların bir kısmının lineer topları veya çarpımı ile tanımlı olması durumunda geçerlidir. Bu belirsiz katsayı fonksiyonu ve onun türevlerinin oluşturduğu lineer

bağımsız kümeyi S ile gösterelim.

Örnek: $u(x) = x^3$ fonksiyonu bir belirsiz katsayı fonksiyonu olup
türevleri

$$u' = 3x^2, u'' = 6x, u''' = 6, u^{IV} = 0 \text{ olmaktadır. O halde}$$

u ve onun türevlerinin oluşturduğu lineer bağımsız küme

$$S = \{x^3, x^2, x, 1\} \text{ olur.}$$

Örnek: $u(x) = \cos 2x$ fonksiyonu bir belirsiz katsayı fonksiyonu
olup türevleri

$$u' = -2\sin 2x, u'' = -4\cos 2x, u''' = 8\sin 2x, u^{IV} = 16\cos 2x, \dots$$

olmaktadır. u ve türevlerinin oluşturduğu lineer bağımsız
küme $S = \{\cos 2x, \sin 2x\}$ dur.

$u = x^2 \cos 2x$ fonksiyonu da bir belirsiz katsayı fonksiyonu
dop türevleri

$$u' = 2x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x$$

$$u'' = 2 \cos 2x - 8x \sin 2x - 4x^2 \cos 2x$$

$$u''' = -12 \sin 2x - 24x \cos 2x + 16x^2 \sin 2x \dots$$

Şeklindedir. u ve türevlerinin bulunduğu lineer bağımsız küme

$$S = \{x^2 \cos 2x, x^2 \sin 2x, x \cos 2x, x \sin 2x, \cos 2x, \sin 2x\} \text{ dur.}$$

Not 2 $u(x) = x^3 e^x$ ise $S = \{x^3 e^x, x^2 e^x, x e^x, e^x\}$

$$u(x) = e^x \sin x \text{ ise } S = \{e^x \sin x, e^x \cos x\}$$

$$u(x) = x^m \text{ ise } S = \{x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, \dots, x, 1\}$$

$$u(x) = \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \text{ ise } S = \{\sin 2x, \cos 2x\}$$

$$u(x) = e^{mx} \text{ ise } S = \{e^{mx}\}$$

$$u(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m \text{ ise } S = \{x^m, x^{m-1}, \dots, x, 1\}$$

$$u(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ ise } S = \{e^x, e^{-x}\} \text{ Şeklindedir.}$$

Gözlem Yöntemi

- ① İlk olarak $L(0)y=0$ homojen denklemin $\mathcal{T} = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ temel gözlem kömesi bulunur.
- ② $B(x)$ fonksiyonunu düştüran her bir $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x)$ belirsiz katsayı fonksiyonları için s_1, s_2, \dots, s_k kömeleri düştürülür. Bunlar için $s_j = s_i$ veya $s_j \subset s_i$ var ise bu durumda s_j alınmayıp lineer bağımsız s_1, s_2, \dots, s_k kömeleri belirlenir.
- ③ Lineer bağımsız s_1, s_2, \dots, s_k kömelerinin herbiri \mathcal{T} temel gözlem kömesi ile karşılaştırılır. Bu kömelerden \mathcal{T} ile ortak elemanı olanlar var ise \mathcal{T} ile farklı oluncaya kadar x in en küçük pozitif kuvvetiyle çarpılır. Böylece yeniden düzenlenmiş S kömeleri elde edilir.
- ④ 3. işlemler sonra düştürülen \mathcal{T} ile hiçbir ortak elemanı içermeyen $S = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ kömesi için A_1, A_2, \dots, A_p kr belirsiz

sabit katsayılar olması üzere özel çözüm

$$y_0 = A_1 s_1 + A_2 s_2 + \dots + A_p s_p$$

formunda aranır.

⑤ y_0 özel çözümü $l(D)y_0 = B(x)$ denklemini sağladığı için bu özdeşlik kullanılarak A_1, A_2, \dots, A_p belirsiz katsayıları bulularak y_0 özel çözümü bulunmuş olur.

Örnek: $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$l(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \text{ dır.}$$

bağımsız çözümler $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$ olması üzere $T = \{e^x, e^{2x}\}$ olup $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ olur.

$B(x) = 2x^2$ için $S = \{x^2, x, 1\}$ seçilmektedir. S ile T kümelerinin hiçbir ortak elemanı olmadığından S kümesi değişmez. Özel çözüm $y_0 = Ax^2 + Bx + C$ formunda aranır.

y_0 çözüm olduğu için denklemin sağlanması gerekir. O halde

$$y_0' = 2Ax + B, \quad y_0'' = 2A \quad \text{olup aynı denklemlerde}$$

yerlerine yazılırsa

$$y_0'' - 3y_0' + 2y_0 = 2x^2$$

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2$$

$$2Ax^2 + (2B - 6A)x + (2A - 3B + 2C) = 2x^2$$

dur. Polinomların eşitliğinden

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1$$

$$2B - 6A = 0 \Rightarrow 2B = 6 \Rightarrow B = 3$$

$$2A - 3B + 2C = 0 \Rightarrow 2 - 9 + 2C = 0 \Rightarrow C = 7/2 \quad \text{bulunur.}$$

Özel çözüm

$$y_0 = x^2 + 3x + \frac{7}{2} \quad \text{olup genel çözüm } y = y_h + y_0 \text{ den}$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} \quad \text{olarak bulunur.}$$

Örnek: $y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 2x + 1$ denkleminin çözümünü (genel çözümünü) bulunuz.

$$l(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^4 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

ve $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$ olup $T = \{1, x, \cos x, \sin x\}$ olmak üzere $y_h = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$ dur.

$B(x) = 3x^2 + 2x + 1$ için $S = \{x^2, x, 1\}$ şeklindedir.

$T = \{1, x, \cos x, \sin x\}$ ile $S = \{1, x, x^2\}$ nin ortak elemanı bulunmaktadır. S nin her bir elemanı x ile çarpılırsa

$S_1 = \{x, x^2, x^3\}$ olup yine T ile S_1 in bir elemanı ortak olacaktır. Bir kez daha x ile çarpılırsa $S_2 = \{x^2, x^3, x^4\}$ kümesi ile T nin ortak elemanı kalmaz. Bu durumda özel çözüm

$$y_p = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 \quad \text{formunda aranır.}$$

$$y_0 = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4, \quad y_0' = 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3,$$

$$y_0'' = 2A + 6Bx + 12Cx^2, \quad y_0''' = 6B + 24Cx, \quad y_0^{(4)} = 24C$$

Modele verilen denklemde yerine yazılırsa

$$24C + 2A + 6Bx + 12Cx^2 = 3x^2 + 2x + 1$$

olur. Buradan

$$12C = 3 \Rightarrow C = 1/4$$

$$6B = 2 \Rightarrow B = 1/3$$

$$24C + 2A = 1 \Rightarrow 2A = 1 - 24 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow 2A = -5 \Rightarrow A = -5/2$$

bulunur. O halde özel çözüm

$$y_0 = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \quad \text{şeklinde dir.}$$

Genel çözüm $y = y_h + y_0$

$$y = c_1 + c_2x + c_3 \cos x + c_4 \sin x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$$

bulunur.

Örneği: $y'' - 3y' + 2y = e^x + 2xe^x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$l(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow T = \{e^x, e^{2x}\}$$

dup $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ dir.

$$u_1(x) = e^x \text{ için } S_1 = \{e^x\}$$

$$u_2(x) = xe^x \text{ için } S_2 = \{xe^x, e^x\} \text{ olup } S_1 \subset S_2 \text{ olduğundan}$$

$$S = \{xe^x, e^x\} \text{ alınır.}$$

$S = \{xe^x, e^x\}$ ile $T = \{e^x, e^{2x}\}$ kollarının ortak elemanı var olduğundan S kümesi x ile çarpılırsa $S^* = \{x^2e^x, xe^x\}$ elde edilir. S^* ile T nin ortak elemanı bulunmamaktadır. O halde özel çözüm

$$y_p = Ax^2e^x + Bxe^x \text{ formunda aranır.}$$

$$y_p' = 2Ax e^x + Ax^2 e^x + Be^x + Bx e^x = e^x (Ax^2 + (B+2A)x + B)$$

$$y_p'' = e^x (Ax^2 + (B+2A)x + B) + e^x (2Ax + B+2A) = e^x \{Ax^2 + (B+4A)x + 2B+2A\}$$

$$y_0'' - 3y_0' + 2y_0 = e^x + 2xe^x$$

$$e^x \{ Ax^2 + (B+4A)x + 2B + 2A \} - 3e^x \{ Ax^2 + (B+2A)x + B \} + 2 \{ Ax^2 e^x + Bxe^x \} = e^x + 2xe^x$$

$$\Rightarrow e^x x^2 \{ \underbrace{A - 3A + 2A}_0 \} + e^x x \{ \underbrace{B + 4A - 3B - 6A + 2B}_{-2A} \} + e^x \{ \underbrace{2B + 2A - 3B}_{2A - B} \} = e^x + 2xe^x$$

$$-2A = 2 \Rightarrow A = -1, \quad 2A - B = 1 \Rightarrow 2(-1) - B = 1 \Rightarrow B = -3$$

$$\Rightarrow y_0 = -x^2 e^x - 3xe^x \quad \text{bulunur.}$$

genel çözüm

$$y = y_h + y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x^2 e^x - 3xe^x \quad \text{dur.}$$

Örnek: $y'' - 2y' - 3y = x^2 + 2e^x - 10\sin x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$l(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1 \text{ ise } T = \{e^{3x}, e^{-x}\}$$

olmak üzere $y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$ dir.

$$u_1(x) = x^2 \text{ için } S_1 = \{x^2, x, 1\}$$

$$u_2(x) = 2e^x \text{ için } S_2 = \{e^x\}$$

$$u_3(x) = -10\sin x \text{ için } S_3 = \{\sin x, \cos x\}$$

S_1, S_2, S_3 ve T kümelerinin herbiri ayrık kümeler olduğundan özel çözüm $S = \{x^2, x, 1, e^x, \sin x, \cos x\}$ kümesi için aranır. Yani özel çözüm

$$y_ö = Ax^2 + Bx + C + De^x + E\sin x + F\cos x \text{ formunda } A, B, C,$$

D, E, F belirsiz katsayıları olarak aranır.

$$y_ö' = 2Ax + B + De^x + E\cos x - F\sin x$$

$$y_ö'' = 2A + De^x - E\sin x - F\cos x \text{ olup denkleme yazılırsa}$$

$$y_0'' - 2y_0' - 3y_0 = x^2 + 2e^x - 10\sin x$$

$$2A + \underbrace{D}e^x - \underbrace{E}\sin x - \underbrace{F}\cos x - 4Ax - 2B - \underbrace{2D}e^x - \underbrace{2E}\cos x + 2F\sin x$$

$$-3Ax^2 - 3Bx - 3C - \underbrace{3D}e^x - \underbrace{3E}\sin x - \underbrace{3F}\cos x = x^2 + \underbrace{2}e^x - 10\sin x$$

$$\Rightarrow -4D e^x = 2e^x \Rightarrow -4D = 2 \Rightarrow D = -1/2$$

$$-3A x^2 = x^2 \Rightarrow -3A = 1 \Rightarrow A = -1/3$$

$$(-E + 2F - 3E)\sin x = -10\sin x \Rightarrow 2F - 4E = -10 \quad \left. \begin{array}{l} -10E = -20 \\ E = 2 \\ F = -1 \end{array} \right\}$$

$$(-F - 2E - 3F)\cos x = 0 \Rightarrow -4F - 2E = 0$$

$$2A - 2B - 3C = 0 \Rightarrow -2B - 3C = \frac{2}{3}$$

$$(-4A - 3B)x = 0 \Rightarrow -4A - 3B = 0 \Rightarrow B = 4/9 \quad \left. \begin{array}{l} C = -\frac{14}{27} \end{array} \right\}$$

$$y_0'' = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27} - \frac{1}{2}e^x + 2\sin x - \cos x \quad \text{bulunur.}$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27} - \frac{1}{2}e^x + 2\sin x - \cos x \quad \text{genel çözümdür.}$$

-M-

Not: $B(x)$ fonksiyonunun türüne göre özel çözümler

① $B(x) = b_1 x^k + b_2 x^{k-1} + \dots + b_{k-1} x + b_k = P_k(x)$ k . dereceden bir polinom ise

$$y_0 = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

② $B(x) = b e^{ax}$, $b, a \in \mathbb{R}$ üstel fonksiyon ise

$$y_0 = A e^{ax}$$

③ $B(x) = b_1 \sin ax + b_2 \cos ax$, $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ trigonometrik fonksiyon ise

$$y_0 = A_1 \cos ax + A_2 \sin ax$$

④ $B(x) = P_k(x) \cdot (b_1 \sin ax + b_2 \cos ax)$ polinom \leftarrow trigonometrik fonk çarpımı

$$y_0 = (A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_1 x + A_0) \sin ax + (B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + \dots + B_1 x + B_0) \cos ax$$

⑤ $B(x) = e^{ax} (b_1 \sin cx + b_2 \cos cx)$, $a, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$ üstel ve trigonometrik fonksiyon çarpımı ise

$$y_a = e^{ax} (A_1 \cos cx + A_2 \sin cx)$$

⑥ $B(x) = P_k(x) e^{ax} (b_1 \sin cx + b_2 \cos cx)$ polinom, üstel ve trigonometrik fonksiyon çarpımı ise

$$y_a = e^{ax} \left\{ (A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_1 x + A_0) \sin cx + (B_k x^k + \dots + B_1 x + B_0) \cos cx \right\}$$

formunda arar.

Not: y_a gözlemindeki fonksiyonlar homojen kısmın gözlemlerinden lineer bağımsız olmalıdır. lineer bağımlı iseler lineer bağımsız olana kadar x 'in kuvvetleri ile çarpılır.

Örnek) a) $y'' + 9y = 2\sin 3x$ b) $y'' + 9y = 2x\sin 3x$ denklemlerinin genel çözümlerini bulunuz.

$$l(\lambda) = \lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -9 = 9i^2 \Rightarrow \lambda = \pm 3i \text{ olup}$$

$$y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x \text{ dir.}$$

@ $B(x) = 2\sin 3x$ olduğundan $y_ö = A\sin 3x + B\cos 3x$ formunda aranmalıdır. Fakat bu fonksiyonlar y_h ile lineer bağımlı olduğundan $y_ö = x(A\sin 3x + B\cos 3x)$ olarak aranır.

$$y_ö' = A\sin 3x + B\cos 3x + x(3A\cos 3x - 3B\sin 3x)$$

$$= (A - 3Bx)\sin 3x + (B + 3Ax)\cos 3x$$

$$y_ö'' = -3B\sin 3x + 3(A - 3Bx)\cos 3x + 3A\cos 3x - 3(B + 3Ax)\sin 3x$$

$$= (-6B - 9Ax)\sin 3x + (6A - 9Bx)\cos 3x$$

$$y_ö'' + 9y = 2\sin 3x$$

$$\cancel{(-6B - 9Ax)\sin 3x} + \cancel{(6A - 9Bx)\cos 3x} + 9x(\cancel{A\sin 3x} + \cancel{B\cos 3x}) = 2\sin 3x$$

$$-6B \sin 3x + 6A \cos 3x = 2 \sin 3x$$

$$-6B = 2 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}, \quad 6A = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$y'' = -\frac{1}{3} \times \cos 3x \text{ d\u00fc\u011f\u00fc genel \u00f6\u0131\u00fcm}$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{3} x \cos 3x \text{ bulunur.}$$

6 $y_h = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ dir.

$B(x) = 2x \sin 3x$ oldu\u011f\u00fcnden $y'' = (A_1 x + A_2) \sin 3x + (A_3 x + A_4) \cos 3x$ formunda aranmalıdır. Fakat bu fonksiyonlarda y_h ile lineer ba\u011f\u0131ml\u0131 olan fonksiyonlar var oldu\u011f\u00fcnden

$$y'' = x \left\{ (A_1 x + A_2) \sin 3x + (A_3 x + A_4) \cos 3x \right\} \\ = (A_1 x^2 + A_2 x) \sin 3x + (A_3 x^2 + A_4 x) \cos 3x$$

formunda aranmalıdır.

$$y'' = (2A_1 x + A_2) \sin 3x + 3(A_1 x^2 + A_2 x) \cos 3x + (2A_3 x + A_4) \cos 3x - 3(A_3 x^2 + A_4 x) \sin 3x$$

$$y'' = (-6A_3 x + 2A_1 - 3A_4) \sin 3x + 3(A_2 + 12A_1 - 3A_4)x - 3A_3 x^2 \cos 3x \\ + (6A_1 x + 3A_2 + 2A_3) \cos 3x - 3(A_4 + 12A_2 + 2A_3)x + 3A_1 x^2 \sin 3x$$

Denkleme karşılaştırmaları yapalım

$$(12A_1x + 2A_3 + 6A_2)\cos 3x + (-12A_3x + 2A_1 - 6A_4)\sin 3x = 2x\sin 3x$$

$$12A_1 = 0 \Rightarrow \underline{A_1 = 0}$$

$$-12A_3 = 2 \Rightarrow \underline{A_3 = -1/6}$$

$$2A_3 + 6A_2 = 0$$

$$2A_1 - 6A_4 = 0$$

$$\Rightarrow A_3 + 3A_2 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 - 3A_4 = 0 \Rightarrow \underline{A_4 = 0}$$

$$\underline{A_2 = -\frac{1}{18}}$$

$$y_p = \frac{1}{18}x\sin 3x - \frac{1}{6}x^2\cos 3x \quad \text{dur.}$$

$$y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x - \frac{1}{18}x\sin 3x - \frac{1}{6}x^2\cos 3x \quad \text{genel çözüm.}$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA