ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler II

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA

Ders 3

1.3. Sabit Katsayılı Homojen Lineer Diferansiyel Denklemler

$$Ly := y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = B(x)$$

denkleminde

$p_1(x) = p_1,\ p_2(x) = p_2,\ \dots,\ p_n(x) = p_n$ şeklinde sabit fonksiyonlar ise

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = B(x) \quad \text{--- (13)}$$

denklemine n. mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan lineer diferansiyel denklem denir.

$$D = \frac{d}{dx},\ D^2 = \frac{d^2}{dx^2},\ \dots,\ D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

türev operatörü ve

$$\ell(D) = D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1} D + p_n \quad \text{--- (14)}$$

olmak üzere (13) denklemi kısaca

$$\ell(D)\, y = B(x) \quad \text{--- (15)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $\ell(D)$ operatörüne sabit katsayılı lineer diferansiyel operatörü denir.

$B(x)=0$ ise $\;\ell(D)y=0\;$ denklemi sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemdir.

Türev Operatörünün Özellikleri

① $\ell_1(D)$ m. mertebeden, $\ell_2(D)$ n. mertebeden lineer diferansiyel operatörler ve y $(m+n)$ defa türevlenebilen bir fonksiyon ise

$$\big(\ell_1(D)+\ell_2(D)\big)y=\ell_1(D)y+\ell_2(D)y$$

$$\big(\ell_1(D).\ell_2(D)\big)y=\ell_1(D)\big(\ell_2(D)y\big)$$

şeklinde tanımlanır.

② $\big(\ell_1(D).\ell_2(D)\big)y=\big(\ell_2(D)\,\ell_1(D)\big)y$

③ $\big[\ell_1(D)\big(\ell_2(D)\ell_3(D)\big)\big]y=\big[\big(\ell_1(D)\,\ell_2(D)\big)\,\ell_3(D)\big]y$

④ $\big[\ell_1(D)\big(\ell_2(D)+\ell_3(D)\big)\big]y=\big(\ell_1(D)\,\ell_2(D)\big)y+\big(\ell_1(D)\,\ell_3(D)\big)y$

Teorem 10! $\forall k \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler doğrudur.

1- $\ell(D)\, e^{kx} = e^{kx}\, \ell(k)$

2- $\ell(D)\,(e^{kx} y) = e^{kx}\, \ell(D+k)\, y$

3- a) $\ell(D^2)\sin kx = \ell(-k^2)\sin kx$, b) $\ell(D^2)\cos kx = \ell(-k^2)\cos kx$

İspat: 1) $\ell(D) = D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1} D + p_n$ şeklindeydi.

$$D e^{kx} = k e^{kx}$$

$$D^2 e^{kx} = D\, D e^{kx} = D(k e^{kx}) = k^2 e^{kx}$$

$$D^3 e^{kx} = D(D^2 e^{kx}) = D(k^2 e^{kx}) = k^3 e^{kx} \; ---$$

$D^n e^{kx} = k^n e^{kx}$ olduğundan

$$\ell(D) e^{kx} = D^n e^{kx} + p_1 D^{n-1} e^{kx} + \dots + p_{n-1} D e^{kx} + p_n e^{kx}$$

$$= k^n e^{kx} + p_1 k^{n-1} e^{kx} + \dots + p_{n-1} k e^{kx} + p_n e^{kx}$$

$$= e^{kx} \{ k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_{n-1} k + p_n \}$$

$$= e^{kx}\, \ell(k)$$

elde edilir.

2) $D(e^{kx}y) = D(e^{kx})y + e^{kx}Dy = ke^{kx}y + e^{kx}Dy = e^{kx}(D+k)y$

$D^2(e^{kx}y) = D(e^{kx}(D+k)y) = ke^{kx}(D+k)y + e^{kx}(D^2+kD)y$

$= e^{kx}\{D^2 + 2kD + k^2\}y = e^{kx}(D+k)^2 y$

$\vdots$

$D^n(e^{kx}y) = e^{kx}(D+k)^n y$

$\ell(D)(e^{kx}y) = D^n(e^{kx}y) + p_1 D^{n-1}(e^{kx}y) + \dots + p_{n-1}D(e^{kx}y) + p_n e^{kx}y$

$= e^{kx}(D+k)^n y + \dots + p_{n-1}e^{kx}(D+k)y + p_n e^{kx}y$

$= e^{kx}\{(D+k)^n + p_1(D+k)^{n-1} + \dots + p_{n-1}(D+k) + p_n\}y$

$= e^{kx}\,\ell(D+k)y$

elde edilir.

3) a) $D^2\sin kx = -k^2\sin kx = (-k^2)^1\sin kx$, $D^4\sin kx = k^4\sin kx = (-k^2)^2\sin kx$

$\dots$ $D^{2n}\sin kx = (-k^2)^n\sin kx$ olduğundan

$\ell(D^2)\sin kx = (D^{2n} + p_1 D^{2(n-1)} + \dots + p_{n-1}D^2 + p_n)\sin kx$

$= \{(-k^2)^n + p_1(-k^2)^{n-1} + \dots + p_{n-1}(-k^2) + p_n\}\sin kx = \ell(-k^2)\sin kx$

b) a)'ya benzer şekilde yapılır.

Çözüm Yöntemi

$$\ell(D)y = (D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1}D + p_n)\,y = 0 \quad \dots (1b)$$

sabit katsayılı homojen lineer denklemler için çözüm yöntemleri vereceğiz.

İlk olarak (1b) denkleminin özel bir hali olan

$(p_{n-1}D + p_n)\,y = 0$ veya $y' + \frac{p_n}{p_{n-1}}\,y = 0$ birinci mertebeden lineer denklemi dikkate alalım. Değişkenlerine ayrılabilen denklem olup çözümü $\frac{y'}{y} = -\frac{p_n}{p_{n-1}} \Rightarrow \ln y = -\frac{p_n}{p_{n-1}}\,x + c \Rightarrow y = c.e^{\lambda x}$ formundadır.

Şimdi de (1b) denkleminin ikinci mertebeden özel bir hali olan

$(p_{n-2}D^2 + p_{n-1}D + p_n)\,y = 0$ veya $y'' + \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}\,y' + \frac{p_n}{p_{n-2}}\,y = 0$ denklemini dikkate alalım. Bu denklem

$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\,y = 0$

şeklinde yazılabilir. $(D-\lambda_2)\,y = u$ dönüşümü yapılırsa

$(D-\lambda_1)u=0$ olur. Buradan $u'-\lambda_1 u=0 \Rightarrow u=ce^{\lambda_1 x}$ bulunur.

$(D-\lambda_2)y=u=ce^{\lambda_1 x} \Rightarrow y'-\lambda_2 y=ce^{\lambda_1 x}$ birinci mertebeden lineer denklem olup çözüm $y=c_1 e^{\lambda_1 x}+c_2 e^{\lambda_2 x}$ formundadır.

$\Rightarrow$ Böylece $\ell(D)y=0$ denkleminin $y=e^{\lambda x}$ formunda çözümlere sahip olabileceği görülür.

$\Rightarrow$ $y=e^{\lambda x}$, $\ell(D)y=0$ denkleminin çözümü ise λ ne olmalıdır?

$y=e^{\lambda x}$, $\ell(D)y=0$ denkleminin bir çözümü olması için

$Dy=y'=\lambda e^{\lambda x}$

$D^2y=Dy'=y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$

$D^n y=D(y^{n-1})=y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$

ifadeleri denklemde yerine yazılırsa

$$\ell(D)y = \ell(D)e^{\lambda x} = (D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1}D + p_n)\, e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + p_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{\lambda x}\{\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n\} = 0$$

$e^{\lambda x} \neq 0$ olduğundan $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$ olmalıdır. Burada

$$\ell(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n$$

ifadesi λ ya göre n. dereceden bir polinom olup buna $\ell(D)y=0$ denkleminin karakteristik polinomu denir. Bu karakteristik polinomun kökleri için $y = e^{\lambda x}$ fonksiyonları (16) denklemini sağlayacaktır. Diğer bir deyişle $y = e^{\lambda x}$, (16) denkleminin bir çözümü ise λ sabiti $\ell(\lambda) = 0$ karakteristik denklemini sağlar.

$\ell(D)y=0$ denkleminin çözümlerini bulabilmek için önce n. dereceden bir polinom olan $\ell(\lambda)=0$ denkleminin köklerini bulmalıyız.

Bu kökler

1) reel ve farklı

2) reel ve katlı

3) kompleks

olabilir.

① Karakteristik Denklemin Kökleri Reel ve farklı ise:

$\ell(\lambda)=0$ denkleminin n farklı ve reel kökü λ_i $i=1,2,\dots,n$

olsun. Bu durumda

$$\ell(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0$$

formunda yazılabilir ve $\ell(D)y=0$ denkleminin n farklı çözümü

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\quad y_2=e^{\lambda_2 x},\quad \dots,\quad y_n=e^{\lambda_n x}$$

olur. $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\dots\neq\lambda_n$ için $W(y_1,y_2,\dots,y_n)\neq 0$ olup $y_i=e^{\lambda_i x}$

çözümleri lineer bağımsızdır. $T=\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x},\dots, e^{\lambda_n x}\}$ olmak

üzere genel çözüm $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+\dots+c_ne^{\lambda_n x}$ şeklindedir.

Örnek: $y'' - 3y' + 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(D) = D^2 - 3D + 2$ lineer operatör formu

$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ karakteristik denklem

$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$ reel ve farklı kökler olmak üzere $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$, $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{2x}$ lineer bağımsız çözümler olur. Buna göre de

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$ genel çözümdür.

Örnek: $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(D) = D^4 - 5D^2 + 4$ için $\ell(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$ karakteristik denklemdir. $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 1, \ \lambda_4 = -1$ olacağından lineer bağımsız çözümler $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$, $y_3 = e^x$, $y_4 = e^{-x}$ olup genel çözüm

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^x + c_4 e^{-x}$$ şeklindedir.

Örnek: $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$f(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$ karakteristik denklemdir.

$\lambda = -1$ kök olduğundan $(\lambda+1)$ çarpanlardan biridir. Diğer çarpan polinom bölmesi ile bulunur.

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 & \lambda + 1 \\ \hline \mp\lambda^3 \mp \lambda^2 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ -5\lambda^2 + \lambda + 6 & \\ \pm 5\lambda^2 \pm 5\lambda & \\ 6\lambda + 6 & \\ 6\lambda + 6 & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$

$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$

$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$ olur.

$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$ için

$y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{2x},\ y_3 = e^{3x}$

lineer bağımsız çözümler olur.

Bunlara bağlı olarak genel çözüm

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

şeklindedir.

② Karakteristik Denklemin Kökleri reel ve katlı ise:

$\ell(\lambda)=0$ karakteristik denkleminin k katlı reel kökü

$\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_k=\alpha$ ve $(n-k)$ tane farklı reel kökü de $\lambda_{k+1},\lambda_{k+2},\dots,\lambda_n$

olsun. Bu durumda

$$\ell(D)y=(D-\alpha)^k\overbrace{(D-\lambda_{k+1})(D-\lambda_{k+2})\cdots(D-\lambda_n)}^{F(D)}y=0$$

$$\Rightarrow\quad F(D)(D-\alpha)^k y=0$$

yazılabilir. $\lambda_i=\alpha$ köklerine karşılık gelen $y_i=e^{\lambda_i x}=e^{\alpha x}$

$i=1,2,\dots,k$ çözümleri lineer bağımsız değillerdir. Fakat $i=1,2,\dots,k$

için $y_i=x^{i-1}e^{\alpha x}$ fonksiyonları $\ell(D)y=0$ denklemini sağlarlar

yani

$$\ell(D)(x^{i-1}e^{\alpha x})=F(D)(D-\alpha)^k(x^{i-1}e^{\alpha x})=F(D)e^{\alpha x}\overbrace{D^k x^{i-1}}^{0}=0$$

dur. Bunların wronksiani sıfırdan farklı olduğundan lineer

bağımsız çözümlerdir. O halde k tane katlı ve $(n-k)$ tane farklı reel

köke karşılık gelen

$$y_1 = e^{\alpha x},\ y_2 = x e^{\alpha x},\ \dots,\ y_k = x^{k-1} e^{\alpha x},\ y_{k+1} = e^{\lambda_{k+1} x},\ \dots,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

çözümleri lineer bağımsız çözümlerdir ve genel çözüm

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x} + \dots + c_k x^{k-1} e^{\alpha x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

veya

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_k x^{k-1}) e^{\alpha x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

şeklindedir.

Sonuç: $\ell(\lambda) = 0$ karakteristik denklemi farklı katlı köklere sahipse örneğin k katlı kökü α, r katlı kökü β, p katlı kökü γ ise $(k + r + p = n)$

$$y = (a_1 + a_2 x + \dots + a_k x^{k-1}) e^{\alpha x} + (b_1 + b_2 x + \dots + b_r x^{r-1}) e^{\beta x}$$
$$+ (c_1 + c_2 x + \dots + c_p x^{p-1}) e^{\gamma x}$$

genel çözüm olur.

Örnek: $y'' - 6y' + 9y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda-3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$$ katlı

reel kök vardır. Lineer bağımsız çözümler

$y_1 = e^{3x}$, $y_2 = xe^{3x}$ şeklinde olup genel çözüm

$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$ veya $y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$ şeklindedir.

Örnek: $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 (\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = 1$$

$y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = xe^{0x} = x$, $y_3 = x^2 e^{0x} = x^2$, $y_4 = e^{1x} = e^x$, $y_5 = xe^x$

lineer bağımsız çözümler olmak üzere genel çözüm

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + (c_4 + c_5 x) e^x$$

olur.

B) Karakteristik Denklemin Kökleri Kompleks ise;

$\ell(\lambda)=0$ karakteristik denklemin $\lambda_1=\alpha+i\beta$ kompleks kökü varsa $\lambda_2=\alpha-i\beta$ eşleniği de karakteristik denklemin köküdür. Bunlara karşılık gelen $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$ ve $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$ çözümleri lineer bağımsızdırlar. Genel çözüm

$$y=a_1 e^{(\alpha+i\beta)x}+a_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

formundadır Euler formülüne göre

$$y=a_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)+a_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

$$y=e^{\alpha x}\{(a_1+a_2)\cos\beta x+i(a_1-a_2)\sin\beta x\}$$

$$y=e^{\alpha x}(a_1+a_2)\cos\beta x+i\,e^{\alpha x}(a_1-a_2)\sin\beta x$$

yazılabilir. Homojen denklemin kompleks çözümünün reel ve sanal kısımları da çözüm olduğundan y_1 yerine $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ ve y_2 yerine $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ çözümleri alınabilir. Bu durumda genel çözüm $y=c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$ veya $y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$ formundadır

Örnek! $y'' + y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \mp i \Rightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$$

eşlenik kompleks kökler. $\alpha = 0$, $\beta = 1$ olduğundan genel çözüm

$$y = c_1 e^{0x} \cos 1x + c_2 e^{0x} \sin 1x = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

dur.

Örnek! $y^{(4)} - y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz

$$\ell(\lambda) = \lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \mp 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda^2 = i^2 \Rightarrow \lambda = \mp i \Rightarrow \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i$$

$y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{0x} \cos \beta x = \cos x$, $\quad (\alpha = 0,\ \beta = 1)$

$y_4 = e^{0x} \sin \beta x = \sin x$ olmak üzere genel çözüm

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

olarak bulunur.

Sonuç: $\ell(\lambda)=0$ karakteristik denkleminin $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$ eşlenik kompleks kökleri k katlı iseler bu köklere karşı gelen genel çözüm parçası

$$y_I = e^{\alpha x}\left\{(c_1+c_2x+\dots+c_k x^{k-1})\cos\beta x + (c_{k+1}+c_{k+2}x+\dots+c_{2k}x^{k-1})\sin\beta x\right\}$$

şeklindedir.

Örnek: $y^{(4)}-4y'''+14y''-20y'+25y=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3+14\lambda^2-20\lambda+25=0 \Rightarrow (\lambda^2-2\lambda+5)^2=0$$

$\Delta=(-2)^2-4.1.5=-16<0$ olduğundan kompleks kök vardır.

$$\lambda=\frac{2\mp\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\mp\sqrt{16i^2}}{2}=\frac{2\mp 4i}{2}=1\mp 2i$$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1+2i$, $\lambda_3=\lambda_4=1-2i$ katlı kompleks köklerdir.

$y=e^{x}\left\{(c_1+c_2x)\cos 2x+(c_3+c_4x)\sin 2x\right\}$ genel çözümdür.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA