Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler II

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA

Ders 2

Uygulama -1 -

1- Aşağıdaki denklemleri sınıflandırınız.

- $x^2y'' + xy' + y = 0$

2.M, değişken katsayılı, lineer, homojen dif. denk

- $y^{(4)} + 2y'' + y = e^x + x^2$

4.M, sabit katsayılı, lineer, homojen olmayan dif denk

- $yy'' + 2xy' + y = 1$

2.M, lineer olmayan dif. denk.

- $xy''' + x(y')^2 = y + x$

3.M, lineer olmayan dif denk

- $2xy''' + y'' + y' + x^2y = \sin x$

3.M, değişken katsayılı, lineer, homojen olmayan dif denk.

- $2xy'' - e^x y' - 2 = 0$

2.M, değişken katsayılı, lineer, homojen olmayan dif denk

2- $L = \dfrac{d^n}{dx^n} + P_1(x)\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\dfrac{d}{dx} + P_n(x)$

ile tanımlı L operatörünün lineer olduğunu gösteriniz.

$L(cy) = c\,L(y)$ ve $L(y_1+y_2) = L(y_1) + L(y_2)$ olmalıdır

veya bunlara eşdeğer olarak $L(c_1y_1+c_2y_2) = c_1L(y_1)+c_2L(y_2)$

sağlanmalıdır.

$$L(c_1y_1+c_2y_2) = \left(\frac{d^n}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + P_n(x)\right)(c_1y_1+c_2y_2)$$

$$= \frac{d^n(c_1y_1+c_2y_2)}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}(c_1y_1+c_2y_2)}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{d(c_1y_1+c_2y_2)}{dx}$$

$$+ P_n(x)(c_1y_1+c_2y_2)$$

Türev operatörü $\left(\frac{d}{dx}\right)$ lineer olduğundan

$$L(c_1y_1+c_2y_2) = c_1\frac{d^ny_1}{dx^n} + c_2\frac{d^ny_2}{dx^n} + c_1P_1(x)\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + c_2P_1(x)\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}$$

$$+ \cdots + c_1P_{n-1}(x)\frac{dy_1}{dx} + c_2P_{n-1}(x)\frac{dy_2}{dx} + c_1P_n(x)y_1 + c_2P_n(x)y_2$$

$$= c_1\left\{\frac{d^n y_1}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x)\frac{dy_1}{dx} + P_n(x)y_1\right\} +$$

$$c_2\left\{\frac{d^n y_2}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x)\frac{dy_2}{dx} + P_n(x)y_2\right\}$$

$$= c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$$

elde edilir. Bu eşitlikte L operatörünün lineer olduğunu ifade eder.

3- $y_1 = 1$ ve $y_2 = \cos x$ $y''' + y' = 0$ denkleminin çözümleri olmak üzere $y = 2-3\cos x$, $y = -5+2\cos x$ fonksiyonlarının da çözüm olduğunu gösteriniz.

$Ly = 0$ denkleminin y_1 ve y_2 çözümleri ise $y = c_1y_1 + c_2y_2$ de denklemin çözümü olacağından $c_1 = 2$ $c_2 = -3$ için $y = 2-3\cos x$, $c_1 = -5$, $c_2 = 2$ için $y = -5+2\cos x$ de çözüm olur yani verilen denklemi sağlarlar.

4- $y'' + 3xy' + x^3 y = e^x$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -5$ } başlangıç değer probleminin varlık-tekliğini inceleyiniz.

$p_1(x) = 3x$, $p_2(x) = x^3$, $B(x) = e^x$ katsayı fonksiyonları $\forall x \in (-\infty, \infty)$ için süreklidir. $x_0 = 1 \in (-\infty, \infty)$ için verilen denklemin verilen başlangıç koşullarını sağlayan çözümü var ve tektir.

5- $y''' + 2y'' + 4xy' + x^2 y = 0$, $y(2) = y'(2) = y''(2) = 0$ } başlangıç değer probleminin varlık-tekliğini inceleyiniz.

$p_1(x) = 2$, $p_2(x) = 4x$, $p_3(x) = x^2$ katsayı fonksiyonları $\forall x \in (-\infty, \infty)$ için sürekli olduğundan $2 \in (-\infty, \infty)$ için başlangıç değer probleminin çözümü var ve tektir. $y(x) = 0$ hem denklemi hem de başlangıç koşullarını sağladığından ve çözümün tekliğinden $y(x) = 0$ aşikar çözüm tek çözümdür.

6- $\left.\begin{array}{l} x^2y'' - 2xy' + 2y = 6 \\ y(0)=3,\ y'(0)=1 \end{array}\right\}$ başlangıç değer probleminin varlık-teklığini inceleyiniz

Denklem düzenlenirse $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{6}{x^2}$ yazılabilir.

Buna göre $p_1(x) = -\frac{2}{x}$, $p_2(x) = \frac{2}{x^2}$, $\beta(x) = \frac{6}{x^2}$ fonksiyonları $x=0$ da sürekli değildir. Teoremin hipotezi sağlanmadığı için başlangıç değer probleminin varlık ve tekliği garanti edilemez. Nitekim

$y = cx^2 + x + 3$

fonksiyonu c parametresinin herhangi bir seçimi için başlangıç değer probleminin çözümü olup sonsuz çözüm mevcuttur.

7- $u_1(x)=\cos^2 x$, $u_2(x)=\sin^2 x$, $u_3(x)=\cos 2x$ fonksiyonlarının lineer bağımlılık durumunu inceleyiniz.

$c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3=0$ olacak şekilde $\exists(c_1,c_2,c_3)\neq(0,0,0)$ var ise bu durumda u_1,u_2,u_3 lineer bağımlı olur. Eşitlik $\forall(c_1,c_2,c_3)=(0,0,0)$ için sağlanır ise o zaman u_1,u_2,u_3 lineer bağımsız olur.

$$c_1\cos^2 x+c_2\sin^2 x+c_3\cos 2x=0$$

$$c_1\cos^2 x+c_2\sin^2 x+c_3(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$$

$$(c_1+c_3)\cos^2 x+(c_2-c_3)\sin^2 x=0$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1+c_3=0 \Rightarrow c_1=-c_3 \\ c_2-c_3=0 \Rightarrow c_2=c_3 \end{array}\right\} \quad \exists(1,-1,-1)\neq(0,0,0) \text{ için}$$

eşitlik sağlanacağından $\{\cos^2 x, \sin^2 x, \cos 2x\}$ lineer bağımlıdır.

8- $\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ fonksiyonlar kümesi veriliyor. Bu fonksiyonların lineer bağımsız olup olmadığını inceleyiniz.

Herhangi fonksiyonlar için; fonksiyonlar lineer bağımlı $\Rightarrow W=0$ veya buna denk olarak $W \neq 0 \Rightarrow$ fonksiyonlar lineer bağımsız

$$W(1, x, x^2, ..., x^{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 0 & 1! & 2x & \cdots & (n-1)x^{n-2} \\ 0 & 0 & 2! & \cdots & (n-1)(n-2)x^{n-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)! \end{vmatrix} = 1!\,2!\,3! \cdots (n-1)! \neq 0$$

olduğundan $\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ lineer bağımsız fonksiyonlardır.

9- e^{ax}, e^{bx}, e^{cx} fonksiyonlarının lineer bağımsız olma koşulu nedir?

$$W(e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}) = \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} & e^{cx} \\ ae^{ax} & be^{bx} & ce^{cx} \\ a^2e^{ax} & b^2e^{bx} & c^2e^{cx} \end{vmatrix} = \underbrace{e^{ax}}_{\neq 0}\underbrace{e^{bx}}_{\neq 0}\underbrace{e^{cx}}_{\neq 0}(a-b)(b-c)(c-a)$$

ifadesi $a \neq b \neq c$ durumunda 0 dan farklı olacağından lineer bağımsız olurlar.

10- $\{y_1=\sin x,\ y_2=x\cos x\}$ fonksiyonlarını temel çözüm kabuleden diferansiyel denklemi bulunuz.

$$W(\sin x, \cos x)=\begin{vmatrix}\sin x & x\cos x\\ \cos x & \cos x - x\sin x\end{vmatrix} = \sin x\cos x - x\sin^2 x - x\cos^2 x$$

$$= \sin x\cos x - x \neq 0,\quad x\neq 0 \text{ için}$$

O halde $x\neq 0$ için $\{\sin x, x\cos x\}$ lineer bağımsızdır ve diferansiyel denklem $x\neq 0$ için

$$W(y_1, y_2, y)=\begin{vmatrix}\sin x & x\cos x & y\\ \cos x & \cos x - x\sin x & y'\\ -\sin x & -2\sin x - x\cos x & y''\end{vmatrix}=0 \quad \text{eşitliğinden}$$

$$(\sin x\cos x - x)y'' + 2\sin^2 x\, y' - (\sin x\cos x + x)y = 0 \quad \text{olarak bulunur.}$$

Veya diferansiyel denklemin genel çözümü $y(x)=c_1\sin x + c_2 x\cos x$ olacağından iki keyfi sabit içeren eğriler ailesinin diferansiyel denklemi

$$\left.\begin{aligned} y' &= c_1\cos x + c_2(\cos x - x\sin x)\\ y'' &= -c_1\sin x + c_2(-2\sin x - x\cos x\end{aligned}\right\}$$

sisteminden c_1 ve c_2 yok edilerek de bulunabilir. Aynı denklem elde edilir.

11- $y''-y'-2y=0$ denkleminin $y=e^{mx}$ formunda iki lineer bağımsız çözümü olduğunu gösteriniz ve genel çözümü bulunuz.

$y=e^{mx}$ çözüm ise denklemi sağlar. O halde

$y'=me^{mx}$, $y''=m^2e^{mx}$ denklemde yerlerine yazılırsa

$$y''-y'-2y=0 \Rightarrow m^2e^{mx}-me^{mx}-2e^{mx}=0$$

$$\Rightarrow (m^2-m-2)\underbrace{e^{mx}}_{\neq 0}=0$$

$$\Rightarrow m^2-m-2=0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1)=0 \Rightarrow m=2,\ m=-1$$

O halde özel çözümler $y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{2x}$ olur.

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{x}+e^{x}=3e^{x}\neq 0$$

olduğundan bu çözümler lineer bağımsızdır. $T=\{e^{-x}, e^{2x}\}$ temel çözümler kümesi olup genel çözüm

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$$ olur.

12- Aşağıda verilen fonksiyon kümelerinin bir I aralığında lineer bağımsız olduğunu gösteriniz ve bunları temel çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz

ⓐ $\{1, e^x\}$ ⓑ $\{x, \sin x, \cos x\}$

ⓐ $W(1, e^x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x \neq 0$ olduğundan $\{1, e^x\}$ lineer bağımsız olup bunları temel çözüm kümesi kabul eden denklem

$W(1, e^x, y) = 0$ eşitliğinden

$$\begin{vmatrix} 1 & e^x & y \\ 0 & e^x & y' \\ 0 & e^x & y'' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow e^x \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 1 & y'' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow e^x(y'' - y') = 0$$

$$\Rightarrow y'' - y' = 0$$

olarak bulunur.

(b) $W(x, \sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ 1 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos^2 x - \cancel{\sin x\cos x} - x\sin^2 x + \cancel{\sin x \cos x}$

$= -x \neq 0, \quad x \neq 0$ için

$x \neq 0$ için $\{x, \sin x, \cos x\}$ lineer bağımsız olup bunları temel çözüm kabul eden diferansiyel denklem

$W(x, \sin x, \cos x, y) = 0$ eşitliğinden

$$\begin{vmatrix} x & \sin x & \cos x & y \\ 1 & \cos x & -\sin x & y' \\ 0 & -\sin x & -\cos x & y'' \\ 0 & -\cos x & \sin x & y''' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x & y' \\ -\sin x & -\cos x & y'' \\ -\cos x & \sin x & y''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & y \\ -\sin x & -\cos x & y'' \\ -\cos x & \sin x & y''' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x\left(-\cos^2 x\, y''' - \sin^2 x\, y' + \cancel{\sin x\cos x\, y''} - \cos^2 x\, y' - \cancel{\sin x \cos x\, y''} - \sin^2 x\, y'''\right)$$

$$-\left(-\cancel{\sin x\cos x\, y'''} - \sin^2 x\, y - \cos^2 x\, y'' - \cos^2 x\, y - \sin^2 x\, y'' + \cancel{\sin x \cos x\, y'''}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -x y''' + y'' - x y' + y = 0$$

veya

$$\Rightarrow x y''' - y'' + x y' - y = 0$$ 3. mertebeden diferansiyel denklem olur.

13- $y''+2y'+y=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1(x)=e^{-x}$ olduğuna göre genel çözümü bulunuz.

$p_1(x)=2$ olmak üzere Abel formülünden

$$\begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix} = c\cdot e^{-\int 2dx}$$

$$e^{-x}y'+e^{-x}y=ce^{-2x} \Rightarrow \frac{e^{-x}y'+e^{-x}y}{e^{-2x}}=c \rightarrow \left(\frac{y}{e^{-x}}\right)'=c$$

$$\Rightarrow \frac{y}{e^{-x}}=cx+c_1 \Rightarrow y=c\underbrace{x e^{-x}}_{y_2(x)}+c_1\underbrace{e^{-x}}_{y_1(x)}$$ genel çözümdür.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA