



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler II

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA

Ders 1

DİFERANSİYEL DENKLEMLER II

1.1. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

$a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$ ve $b(x)$ fonksiyonları bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı ve $a_0(x) \neq 0$ olmak üzere

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \dots (1)$$

formunda yazılan denkleme **n . mertebeden lineer diferansiyel**

denklem denir. Burada $y = y(x)$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, \dots , $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ dir.

$$p_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad p_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}, \quad \dots, \quad p_{n-1}(x) = \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)}, \quad B(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}$$

ile gösterilirse (1) denklemi

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = B(x) \dots (2)$$

formunda yazılabilir. Bu yazılış n . mertebeden lineer denklemin genel yazılış formudur.

$$L' = \frac{d^n}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + P_n(x) \dots \textcircled{3}$$

olarak tanımlanırsa $\textcircled{2}$ denklemini kısaca

$$L(y) = B(x) \dots \textcircled{4}$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer $B(x) = 0$ ise $Ly = 0$ denklemine n . mertebeden homojen lineer denklem denir. Aksi halde yani $B(x) \neq 0$ ise homojen olmayan lineer denklem denir.

Sonuçlar

$\textcircled{1}$ $\textcircled{3}$ ile tanımlanan L operatörü lineerdir. Yani

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

$$L(cy) = c \cdot L(y) \quad , \quad c \text{ sabit}$$

şartlarını sağlar.

② $Ly=0$ homojen denkleminin $y=y_1(x)$ ve $y=y_2(x)$ herhangi iki çözümü ise $y=y_1(x) \mp y_2(x)$ de $Ly=0$ denkleminin çözümüdür.

③ $y=y_1(x)$, $Ly=0$ denkleminin bir çözümü ise c bir keyfi sabit olmak üzere $y=c y_1(x)$ de $Ly=0$ denkleminin çözümüdür.

② ve ③ sonuçlarını genellersek $y=y_1(x), y=y_2(x), \dots, y=y_n(x)$ $Ly=0$ denkleminin çözümleri ise c_1, c_2, \dots, c_n keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$
 de $Ly=0$ denkleminin çözümüdür.

\Rightarrow Homojen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin belli katarı, toplamı ve farkları da çözümlüdür.

④ $y = u(x) + iv(x)$ kompleks fonksiyonu $Ly = 0$ denkleminin bir çözümlü ise bu kompleks fonksiyonun reel ve sanal kısımları olan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları da çözümlüdür.

⑤ $y = y_1(x)$ ve $y = y_2(x)$ fonksiyonları $Ly = B(x)$ homojen olmayan lineer denklemin çözümleri ise $y = y_1(x) - y_2(x)$, $Ly = 0$ denkleminin çözümlüdür.

⇒ Sonuçların ispatları L operatörünün lineer olmasından dolayı aşıktır.

Teorem 1 (Lineer Diferansiyel Denklemler için Varlık ve Teklik Teoremi):

$p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n-1}(x)$ ve $B(x)$ fonksiyonları $I \subset \mathbb{R}$ aralığında sürekli olmak üzere

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = B(x)$$

denkleminin

$$y(x_0) = \alpha_0, y'(x_0) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir $y = y(x)$ çözümü vardır ve bu çözüm sadece x_0 noktasının komşuluğunda değil tüm I aralığında tanımlıdır. Burada $x_0 \in I$ ve $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ dir.

Soru 4: $p_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) fonksiyonları $I \subset \mathbb{R}$ aralığında sürekli olmak üzere $Ly = 0$ homojen lineer diferansiyel denkleminin bir $x_0 \in I$ noktasında

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

başlangıç koşullarını sağlayan tek çözümü $y(x) = 0$ aşıkar çözümüdür.

1.2. Fonksiyonların Lineer Bağımlılığı ve Bağımsızlığı

Tanım: $I = [a, b]$ aralığında tanımlı $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ fonksiyonları verilsin. Her $x \in I$ için

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) = 0 \quad \text{--- (5)}$$

esitliği ancak c_1, c_2, \dots, c_n sabitlerinden en az birinin sıfırdan farklı olması ile (yani hepsi birden sıfır olmadığında) sağlanıyorsa $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ fonksiyonlarına I aralığında **lineer bağımlı fonksiyonlar** denir. Aksi halde yani (5) esitliği ancak ve ancak

$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ olması ile sağlanıyorsa $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ fonksiyonları I aralığında **lineer bağımsız fonksiyonlardır**.

\Rightarrow Lineer bağımlı fonksiyonlar bir-birlerinin belli bir katı şeklinde yazılabilir.

Örnek: $u_1 = \sin 2x$ ve $u_2 = \sin x \cos x$ fonksiyonları herhangi bir aralıkta lineer bağımlıdır. Çünkü

$$c_1 \sin 2x + c_2 \sin x \cos x = 0$$

esitliği her ikisi birden sıfır olmayan $c_1 = 1/2$ ve $c_2 = -1$ seçimiyle her x reel sayısı için sağlanır.

$$(2c_1 \sin x \cos x + c_2 \sin x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = -2 \text{ olarak da seçilebilir})$$

veya $u_1 = 2u_2$ olduktan lineer bağımlı olurlar.

Örnek: $u_1 = x$ ve $u_2 = x^2$ fonksiyonları $0 < x \leq 1$ aralığında lineer bağımsızdır. Çünkü bu aralıktaki tüm x ler için

$$c_1 x + c_2 x^2 = 0$$

esitliği sadece $c_1 = c_2 = 0$ için sağlanmaktadır.

Tanım: u_1, u_2, \dots, u_n bir I aralığında $n-1$ kez türetilebilir fonksiyonlar olsun.

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantına u_1, u_2, \dots, u_n fonksiyonlarının **Wronskianı** denir. Bu determinant I aralığında tanımlı bir reel fonksiyondur ve $x \in I$ noktasındaki değeri $W(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$ ile gösterilir.

Teorem 2: u_1, u_2, \dots, u_n fonksiyonları I aralığında $n-1$ kez türetilebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda u_1, u_2, \dots, u_n fonksiyonları I aralığında lineer bağımlı ise $W(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$ dir.

İspat: u_1, u_2, \dots, u_n fonksiyonları I aralığında lineer bağımlı olsun. Tanım gereği $\exists (c_1, c_2, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ için

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) = 0$$

esitliği sağlanır. Bu eşitliğin $(n-1)$ kez türevi alınırsa

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) = 0$$

$$c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) + \dots + c_n u_n'(x) = 0$$

!

$$c_1 u_1^{(n-1)}(x) + c_2 u_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n u_n^{(n-1)}(x) = 0$$

lineer homojen denklem sistemi elde edilir. Bu sistem c_1, c_2, \dots, c_n bilinmeyenlerine göre sıfırdan farklı çözüme sahip olduğundan denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinanı sıfır olmalıdır. Yani

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Bu ise $W(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$ olması demektir.

Bu teorem fonksiyonların lineer bağımlı olup olmadığını hakkında bir hüküm vermez. Ancak bu teoremin değeri olan aşağıdaki teorem bir hüküm vermektedir.

Teorem 3: u_1, u_2, \dots, u_n fonksiyonları I aralığında $(n+1)$ kez türevlenebilir olsun. Bu durumda $W(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0$ ise u_1, u_2, \dots, u_n lineer bağımsızdır.

lineer bağımlı $\Rightarrow W = 0 \equiv W \neq 0 \Rightarrow$ lineer bağımsız

⊕ $W = 0$ olduğunda fonksiyonlar lineer bağımlı da olabilir lineer bağımsız da olabilir kesin bir hüküm yoktur.

Teoremi: Eğer y_1, y_2, \dots, y_n fonksiyonları bir I aralığında $(n-1)$ kez sürekli türetilebilir ise (veya $Ly = 0$ homojen denkleminin bir I aralığında çözümleri ise) bu fonksiyonların lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ olmasıdır.

veya buna denk olarak

$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0 \iff y_1, y_2, \dots, y_n$ çözümleri lineer bağımsızdır.

İspat (\Rightarrow): Homojen denklemin y_1, y_2, \dots, y_n çözümlerinin $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ Wronskianı I aralığında her x için sıfırdan farklı olsun. Göstermemiz gereken y_1, y_2, \dots, y_n çözümlerinin lineer bağımsız olmasıdır. Bu çözümlerin lineer bağımlı olduğunu kabul ederlim. Bu durumda hepsi birden sıfır olmayan c_1, c_2, \dots, c_n sabitleri ve $\forall x \in I$ için

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad \text{--- } \textcircled{6}$$

yaazlabilir. Dolayısıyla

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \dots + c_n y_n'(x) = 0$$

!

$$c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0$$

--- } \textcircled{7}

bağıntıları sağlar. $\textcircled{6}$ ve $\textcircled{7}$ ye c_1, c_2, \dots, c_n bilinmeyenler için göre homojen denklemler sistemi olarak bakılabilir. Bu sistemin katsayılar matrisinin determinanı $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ olup hipotezden $W \neq 0$ olduğundan sistemin bir tek $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ çözümü olmalıdır. Bu ise y_1, y_2, \dots, y_n çözümlerinin lineer bağımlı olması tabii ile gelişir. O halde y_1, y_2, \dots, y_n çözümleri lineer bağımsızdır.

(\Leftarrow): Homojen denklemin y_1, y_2, \dots, y_n çözümleri I de lineer bağımsız olsun. Göstermeniz gereken her x için $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$

olduğudur. Kabul edelim ki $\exists x_0$ için $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) = 0$ olsun.

$x = x_0$ için $\textcircled{6}$ ve $\textcircled{7}$ denklemlerini

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0$$

!

$$c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

} --- $\textcircled{8}$

olup $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) = 0$ olduğundan $\exists (c_1, c_2, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ çözümlü vardır. Bu çözümler $c_{10}, c_{20}, c_{30}, \dots, c_{n0}$ olsun. Buna bağlı

$$y_0(x) = c_{10} y_1(x) + c_{20} y_2(x) + \dots + c_{n0} y_n(x)$$

fonksiyonu tanımlayalım. y_1, y_2, \dots, y_n ler $Ly = 0$ denkleminin çözümlü olduğundan $y_0(x)$ fonksiyonunda $Ly = 0$ denkleminin çözümlü dur. $c_{10}, c_{20}, \dots, c_{n0}$ ler $\textcircled{8}$ sisteminin çözümlü olduğundan

$$y_0(x_0) = y_0'(x_0) = \dots = y_0^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{---} \textcircled{9}$$

olur. Böylece $y_0(x)$, $Ly = 0$ denkleminin $\textcircled{9}$ şartını sağlayan çözümlü -13-

dur. $Ly=0$ homojen denklemin \textcircled{B} koşulunu sağlayan çözümlerine sadece $y(x)=0$ çözümleri olduğundan $y_0(x)=0$ olmalıdır. Böylece hepsi birden sıfır olmayan c_0, c_2, \dots, c_n sabitleri için

$$c_0 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$$

elde edilir. Bu y_1, y_2, \dots, y_n lerin I da lineer bağımsız olduğu hipotezi ile çelişir. O halde kabulümüzü zıtlıyoruz. Homojen denklemin y_1, y_2, \dots, y_n çözümleri I da lineer bağımsız ise I daki tüm x ler için $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$ dir.

Not: Lineer bağımsızlığı araştırılan fonksiyonlar bir homojen lineer diferansiyel denklemin çözümleri değil de herhangi fonksiyonlar ise Teorem 4 genellikle doğru değildir. Bunu görmemiz için

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonlarını ve I aralığı olarak da $-1 \leq x \leq 1$ aralığını seçelim.

Bu durumda

$$x > 0 \text{ ise } W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0$$

$$x < 0 \text{ ise } W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = 0$$

olup $-1 \leq x \leq 1$ deki tüm x ler için $W(f_1, f_2)(x) = 0$ olmaktadır.

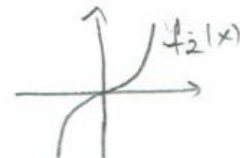
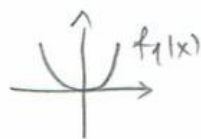
Fakat bu aralıkta f_1 ve f_2 fonksiyonları lineer bağımsızdır.

Gerçekten $-1 \leq x \leq 1$ deki tüm x ler için

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \text{ ise } x=1 \text{ ve } x=-1 \text{ için}$$

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ olup buradan } c_1 = c_2 = 0 \text{ elde edilir.}$$

$$c_1 - c_2 = 0$$



⊛ f_1 ve f_2 fonksiyonları biri diğerinin belli bir kati olarak yazılamaz.

Teorem 5: $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ fonksiyonları bir I aralığında sürekli olsun. Bu takdirde n . mertebeden $Ly=0$ homojen lineer denklemin I da lineer bağımsız n çözümlü vardır.

Ayrıca bu n lineer bağımsız çözümler y_1, y_2, \dots, y_n ise $Ly=0$ denkleminin bir y çözümlü bu lineer bağımsız çözümlerin lineer birleşimi olarak tez türlü yazılabilir. Yani

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

olacak şekilde c_1, c_2, \dots, c_n sabitleri mevcuttur.

İspat: x_0 , I da herhangi bir nokta olsun. y_1, y_2, \dots, y_n fonksiyonları I aralığında $Ly=0$ denkleminin sırasıyla

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1, \quad \dots, \quad y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$y_n(x_0) = 0, \quad y_n'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

Özel başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Teorem 1 gereği böyle çözümler tüm I da mevcuttur. Şimdi de bu çözümlerin I da lineer bağımsız olduğunu ispat edelim. I aralığındaki her x için

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \dots \textcircled{10}$$

olarak seçilerek $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sabitlerinin mevcut olduğunu varsayalım.

y_1, y_2, \dots, y_n fonksiyonları $Ly=0$ denkleminin çözümleri olduğundan I da n . mertebeye kadar sürekli türevlenebilir. Böylece $\textcircled{10}$ dan

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \dots + \alpha_n y_n'(x) &= 0 \\ \alpha_1 y_1''(x) + \alpha_2 y_2''(x) + \dots + \alpha_n y_n''(x) &= 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \textcircled{11}$$

yazılabilir. $\textcircled{10}$ ve $\textcircled{11}$ de $x=x_0$ alınırsa ve y_1, y_2, \dots, y_n nin bu noktadaki başlangıç koşulları kullanılırsa $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ elde edilir ki bu da y_1, y_2, \dots, y_n çözümlerinin lineer bağımsız olduğunu gösterir.

Teoremin ikinci kısmını ispat etmek için $y, Ly=0$ denkleminin $x_0 \in I$ da

$$y(x_0) = \beta_1, y'(x_0) = \beta_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_n$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümdür. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ile

$$\tilde{y}(x) = \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) + \dots + \beta_n y_n(x)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu $\tilde{y}(x)$ fonksiyonunda $Ly=0$ denkleminin bir çözümdür ve aynı zamanda $x_0 \in I$ noktasında

$$\tilde{y}(x_0) = \beta_1, \tilde{y}'(x_0) = \beta_2, \dots, \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \beta_n$$

koşullarını sağlar. Bu durumda y ve \tilde{y} , $Ly=0$ denkleminin $x_0 \in I$ noktasında aynı başlangıç koşullarını sağlayan iki çözümdür. Teorem 1 gereği çözümlerin tekliğinden

$$y(x) = \tilde{y}(x) = \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) + \dots + \beta_n y_n(x)$$

elde edilir.

Sonuç: n . mertebeden homojen lineer denklemin n den çok çözümlü lineer bağımlıdır.

Tanım: n . mertebeden lineer homojen $Ly=0$ denkleminin I da n çözümlü olan y_1, y_2, \dots, y_n fonksiyonları lineer bağımsız ise $T = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ karesine **temel çözümler kümesi** denir.

Tanım: $Ly=0$ denkleminin I da temel çözümler kümesi $T = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ ise $c_i, i=1, 2, \dots, n$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

ile tanımlı fonksiyona $Ly=0$ denkleminin **genel çözümlü** denir.

$\frac{4}{5}$ Örneği. $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ fonksiyonları $x \in (-\infty, \infty)$ için $y'' + y = 0$ homojen denkleminin çözümleridir. Bu orada

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

olduğundan bu iki çözüm linear bağımsızdır. O halde verilen denklemin temel çözüm kümesi $\mathcal{T} = \{\sin x, \cos x\}$ ve genel çözümlü

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

şeklinde dir.

Örneği: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ denkleminin gözömleri e^x, \bar{e}^x, e^{2x} şeklindedir.

$$\text{WV}(e^x, \bar{e}^x, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^x & \bar{e}^x & e^{2x} \\ e^x & -\bar{e}^x & 2e^{2x} \\ e^x & \bar{e}^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x \bar{e}^x e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6e^{2x}$$

determinanti her x reel sayısı için sıfırdan farklı olduğundan bu gözömler her reel aralıkta linear bağımsızdır. Böylece denklemin temel gözömler kümesi $T = \{e^x, \bar{e}^x, e^{2x}\}$ ve genel gözömlü

$$y = c_1 e^x + c_2 \bar{e}^x + c_3 e^{2x}$$

olur.

Teorem 6: Bir I aralığında n . mertebeden sürekli türevli ve $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ şartını sağlayan n tane y_1, y_2, \dots, y_n fonksiyonları verilmiş ise temel çözümler $T = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ dan n . mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemin vardır ve bu denklemin

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n, y) = 0$$

olarak yazılır.

İspat: $T = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ temel çözümler için genel çözüm

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

şeklinde olacaktır y, y_1, y_2, \dots, y_n fonksiyonları lineer bağımlıdır. Bu durumda

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n, y) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & y_3^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

dir.

Determinant son sütuna göre açılırsa

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \dots = 0 \quad (12)$$

dur. $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$ olmak üzere (12) eşitliği

$$W(x) y^{(n)} - W'(x) y^{(n-1)} + \dots = 0$$

şeklinde dir. $W(x) \neq 0$ oldan ve $p_1(x) = \frac{W'(x)}{W(x)}$ olmak üzere

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots = 0$$

şeklinde n mertebeden homojen bir diferansiyel denkleme elde edilir.

Örneği: $y_1 = x$, $y_2 = x e^x$ fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x e^x \\ 1 & e^x + x e^x \end{vmatrix} = x e^x + x^2 e^x - x e^x = x^2 e^x \neq 0, \quad (x \neq 0 \text{ için})$$

$x=0$ içermeyen her $x \in I$ aralığında temel çözümler kümesi

$T = \{x, x e^x\}$ olan ikinci mertebeden homojen lineer bir diferansiyel denklemin vardır ve bu denklemin

$$W(x, x e^x, y) = 0 \quad \text{çiftliğinden}$$

$$\begin{vmatrix} x & x e^x & y \\ 1 & e^x + x e^x & y' \\ 0 & e^x(x+2) & y'' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x e^x + x^2 e^x) y'' + e^x(x+2)y - x e^x(x+2) y' - x e^x y'' = 0$$

$$\Rightarrow x^2 e^x y'' - x e^x(x+2) y' + e^x(x+2)y = 0$$

$$\Rightarrow y'' - \frac{(x+2)}{x} y' + \frac{(x+2)}{x^2} y = 0$$

şeklinde bulunur.

Teorem 7: Eğer y_1, y_2, \dots, y_n I aralığında $Ly=0$ homojen lineer diferansiyel denkleminin lineer bağımsız n çözümleri ise I aralığındaki her x için

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = c \cdot e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}, \quad c \text{ bir sabit}$$

esitliği vardır. Buna Abel formülü denir.

İspat: Lineer bağımsız y_1, y_2, \dots, y_n çözümlerinin Wronskianı

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{dikiz üzere bulunur}$$

$$W'(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{şekindedir.}$$

y_1, y_2, \dots, y_n lerin hepsi $Ly=0$ denkleminin çözümleri olduğundan

$$y_1^{(n)} = -p_1(x) y_1^{(n-1)} - \dots - p_n(x) y_1$$

$$y_2^{(n)} = -p_1(x) y_2^{(n-1)} - \dots - p_n(x) y_2$$

!

$$y_n^{(n)} = -p_1(x) y_n^{(n-1)} - \dots - p_n(x) y_n$$

türevleri $w'(y_1, y_2, \dots, y_n)$ determinantının son satırında yerlerine yazılıp determinant özellikleri kullanılırsa

$$w'(y_1, y_2, \dots, y_n) = -p_1(x) w(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

veya kısaca

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -p_1(x)$$

olur. Buradan integral alınırsa $\int_{x_0}^x \frac{w'(t)}{w(t)} dt = -\int_{x_0}^x p_1(t) dt$ olup

$$w(x) = w(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}, \quad c = w(x_0)$$

elde edilir.

Teorem 8: y_1, y_2, \dots, y_n bir I aralığında $Ly=0$ denkleminin n çözümlü
 dsun. Bu takdirde $\forall x \in I$ için ya $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = 0$ dir ya da
 $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$ dir.

İspat: Abel formülünden

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}$$

olduğundan $e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}$ ifadesi I da sıfırdan farklıdır. Eğer x_0 da
 $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) = W(x_0) = 0$ ise I da ki her x için $W(x) = 0$ elde
 edilir. Eğer I da ki bir x_0 için $W(x_0) \neq 0$ ise I aralığında ki
 her x için $W(x) \neq 0$ elde edilir

\Rightarrow Abel formülü $W(x) = c \cdot e^{-\int p_1(x) dx}$ şeklinde de yazılır.

Sonuç: $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ ikinci mertebeden homojen lineer denklemin eğer $y = y_1(x)$ şeklinde bir özel çözümleri verilmiş ise Abel formülü yardımıyla genel çözümleri bulunabilir. Şöyle ki:

$$W(y_1, y_2)(x) = c \cdot e^{-\int p_1(x) dx} \quad \text{Abel formülü ağız olarak yazılırsa}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = c e^{-\int p_1(x) dx} \Rightarrow y_1 y_2' - y_1' y_2 = c e^{-\int p_1(x) dx} \quad \text{dur. Her iki}$$

taraf y_1^2 ile bölünürse

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = c \cdot \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} \Rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{c}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx} \quad \text{dur.}$$

Her iki tarafın integrali alınırsa $\frac{y_2}{y_1} = c \cdot \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx} dx + C_1$ olup denklemin genel çözümleri

$$y_2(x) = c \cdot y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x) dx} dx + C_1 y_1(x) \quad \text{şeklinde bulunur.}$$

Burada ikinci özel çözümleri $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x) dx} dx$ şeklindedir.

Örnek: $(2x^2+1)y'' - 4xy' + 4y = 0$ denkleminin bir özel çözümlü $y_1(x) = x$ ise genel çözümlü Abel (veya Liouville) formülü yardımıyla bulunuz.

$$y'' - \frac{4x}{2x^2+1} y' + \frac{4}{2x^2+1} y = 0 \text{ olduğundan } p_1(x) = \frac{-4x}{2x^2+1} \text{ dir.}$$

Abel formülünden

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = c \cdot e^{-\int \frac{4x}{2x^2+1} dx}$$

$$xy' - y = c e^{\ln(2x^2+1)}$$

$$\Rightarrow xy' - y = c(2x^2+1)$$

$$\Rightarrow \frac{xy' - y}{x^2} = c \cdot \frac{(2x^2+1)}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = c \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = c \cdot \left(2x - \frac{1}{x}\right) + c_1$$

$\Rightarrow y(x) = c(2x^2 - 1) + c_1 x$ genel çözümdür.

$y_1(x) = x$ ile lineer bağımsız olan diğer çözüm

$y_2(x) = 2x^2 - 1$ dir. Bu ikinci çözüm

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x) dx} dx \quad \text{formülünden de}$$

bulunabilir. Gerçekten $y_1(x) = x$, $p_1(x) = -\frac{4x}{2x^2+1}$ için

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x \cdot \int \frac{1}{x^2} \cdot e^{\int \frac{4x}{2x^2+1} dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\ln(2x^2+1)} dx = x \int \frac{1}{x^2} (2x^2+1) dx \\ &= x \int \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x \left(2x - \frac{1}{x}\right) = 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre de genel çözüm $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ den

$y(x) = c_1 x + c_2 (2x^2 - 1)$ olarak da bulunabilir.

Tanım! n . mertebeden homojen olmayan $Ly = B(x)$ denkleminin ve onun homojen kısmını olan $Ly = 0$ denklemini göz önüne alalım.

$Ly = 0$ denkleminin genel çözümüne $Ly = B(x)$ 'in tamamlayıcı fonksiyonu yani homojen kısmının genel çözümüdür, y_h ile gösterilir ve $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$ şeklindedir.

$Ly = B(x)$ denkleminin hiçbir keyfi sabit içermeyen ($y_i(x)$ lerden farklı) herhangi bir çözüme özel çözüm denir ve y_0 ile gösterilir.

$y = y_h(x) + y_0(x)$ çözüme $Ly = B(x)$ **homojen olmayan** denklemin **genel çözümü** denir.

Teoremi! $Ly = B_1(x) + B_2(x)$ denkleminin verilsin. $y = y_{01}(x)$, $Ly = B_1(x)$ 'in bir özel çözümü, $y = y_{02}(x)$, $Ly = B_2(x)$ 'in bir özel çözümü ise $y = y_{01}(x) + y_{02}(x)$ $Ly = B_1(x) + B_2(x)$ denkleminin çözümüdür.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA