1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

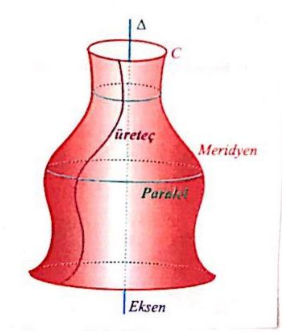
Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 15

2

DÖNEL YÜZEYLER



Aynı düzlem içinde bulunan bir C eğrisi ile bir Δ doğrusu veriliyor. C eğrisinin Δ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeye bir dönel yüzey denir. Δ doğrusuna dönel yüzeyin ekseni, C eğrisine de dönel yüzeyin üreteci adı verilir.

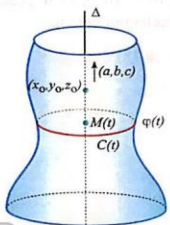
Döndürülen eğrinin her bir konumuna dönel yüzeyin bir meridyeni denir. Dönme esnasında C eğrisi üzerindeki her nokta merkezi eksen üzerinde bulunan bir çember çizer. Bu çemberlerin herbirine dönel yüzeyin bir paraleli adı verilir.

3

Dönel Yüzeyin Denkleminin Bulunması

$$(C)\ \ldots \begin{cases} \varphi_1(x,y,z)=0 \\ \varphi_2(x,y,z)=0 \end{cases} \quad \text{eğrisinin } \Delta \ldots \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t$$

ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin denklemi şu şekilde bulunur: Yüzey üzerinde temsili bir nokta $P(x,y,z)$ olsun. Bu nokta yüzeyin herhangi bir paralelinin üzerindedir. Ayrıca bu nokta,



Δ ya dik olan bir düzlem, $M(x_0,y_0,z_0)$ merkezli bir küre ve C eğrisinin arakesitinden oluşur.

Δ ya dik olan düzlem $ax+by+cz+\lambda'=0$ şeklindedir. P noktasının bulunduğu paralel (çember), uygun bir λ' sayısı için bu düzlemdedir. Aynı çember uygun bir λ sayısı için $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda$ küresinin üzerindedir.

174

4

λ' sayısının değişmesi P nin bulunduğu düzlemi kendine paralel olarak hareket ettirir. λ nın değişmesi ise merkezin sabit kalarak kürenin büyüyüp küçülmesini sağlar. λ ve λ' öyle ayarlanabilir ki hem düzlem hem de küre P noktasından geçer. Bu durumda

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda \\ ax+by+cz+\lambda'=0 \\ \varphi_1(x,y,z)=0 \\ \varphi_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

denklemlerinden λ ve λ' ye bağlı $\Phi(\lambda,\lambda')=0$ bağıntısı elde edilir. λ ve λ' nün değerleri yukarıdan çekilip bu son denklemde yerine yazılırsa

$$\Phi\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,\ -ax-by-cz\right)=0$$

denklemi bulunur. Bu ise dönel yüzeyin denklemini verir.

175

5

Not: (c) eğrisinin $c(t)=(f(t), g(t), h(t))$ şeklinde verilmesi durumunda da yüzeyin denklemi aynı şekilde bulunur:

Yüzey üzerinde temsilci bir nokta $P(x,y,z)$ olsun. Bu nokta yüzeyin herhangi bir paralelinin üzerindedir. Ayrıca bu nokta uygun λ ve λ' sayıları için,

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda$$
$$ax+by+cz+\lambda'=0$$

küresi ile düzleminin kesişim çemberinde bulunur. $c(t)$ noktası da bu çember üzerinde bulunacağından

$$(f(t)-x_0)^2+(g(t)-y_0)^2+(h(t)-z_0)^2=\lambda$$
$$af(t)+bg(t)+ch(t)+\lambda'=0$$

olur. Bu iki denklemden λ ve λ' ye bağlı $\varphi(\lambda,\lambda')=0$ denklemi elde edilir. λ ve λ' değerleri yerine yazılarak,

$\varphi((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2, -ax-by-cz)=0$ dönel yüzey denklemi bulunur. 176

6

Örnek

$C(t)=(0,t,t^2)$ eğrisinin $v(t)=(0,0,0)+t(0,0,1)$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin denklemini bulunuz.

Çözüm:

Doğruya dik olan düzlemin normali doğrunun doğrultmanı olacağından bu düzlemin denklemi $0x+0y+z+\lambda'=0$ olur. $(0,0,0)$ merkezli küre $x^2+y^2+z^2=\lambda$ dır. Dönel yüzeyde alınan keyfi bir $P(x,y,z)$ noktası yüzeyin bir çemberinde bulunur. Yani uygun λ ve λ' için

$$x^2+y^2+z^2=\lambda$$
$$z+\lambda'=0$$

denklemlerinin arakesitindedir. $c(t)$ noktası da bu çemberde olacağından

$$t^2+t^4=\lambda$$
$$t^2+\lambda'=0$$

Buradan λ ve λ' ye bağlı $-\lambda'+\lambda'^2=\lambda$ denklemi bulunur.

177

λ ve λ' nün değeri yerine yazılırsa

$$z + z^2 = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow x^2+y^2=z \text{ dönel yüzeyi bulunur.}$$

Not: $z=f(x)$ denklemli eğrinin z ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin denklemini bulalım: Eğriyi $c(t)=(t,0,f(t))$ yazabiliriz. z ekseni $(0,0,0)$ dan geçen ve doğrultmanı $(0,0,1)$ olan doğrudur. z eksenine dik düzlem $z+\lambda'=0$ dır. $(0,0,0)$ merkezli küre $x^2+y^2+z^2=\lambda$ biçimindedir.

$$x^2+y^2+z^2=\lambda \,,\ z+\lambda'=0 \text{ dan}$$

$$\begin{cases} t^2+f(t)^2=\lambda \\ f(t)+\lambda'=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow [f^{-1}(-\lambda')]^2+\lambda'^2=\lambda$ bulunur. λ ve λ' nün değeri yazılırsa $[f^{-1}(z)]^2+z^2=x^2+y^2+z^2$

$$\Rightarrow f^{-1}(z)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{x^2+y^2})=z \text{ elde edilir.}$$

Benzer biçimde,

$y=f(x)$ eğrisinin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin denklemi $y=f(\sqrt{x^2+z^2})$,

$x=f(z)$ eğrisinin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin denklemi $x=f(\sqrt{z^2+y^2})$ şeklindedir.

Örnek

$y=z^3$ eğrisinin y ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin denklemini yazınız.

Çözüm:

$y=f(z)$ nin y ekseni etrafında dönmesiyle $y=f(\sqrt{z^2+x^2})$ idi.

$$\Rightarrow y=(\sqrt{z^2+x^2})^3 \Rightarrow y=(x^2+z^2)^{3/2}$$

$$\Rightarrow y^2=(x^2+z^2)^3 \text{ olur.}$$

Örnek

(C) ... $\begin{cases} x=0 \\ (y-b)^2+z^2=r^2 \end{cases}$ eğrisinin z ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin denklemini bulunuz.

Çözüm:

z ekseni $(0,0,0)$ dan geçen doğrultusu $(0,0,1)$ olan doğrudur.

$$\begin{cases} z+\lambda'=0 \\ x^2+y^2+z^2=\lambda \\ x=0 \\ (y-b)^2+z^2=r^2 \end{cases}$$

Bu denklemlerden λ ve λ' ye bağlı bir denklem bulacağız.

$$y^2+z^2=\lambda \Rightarrow y^2=\lambda-\lambda'^2 \Rightarrow y=\sqrt{\lambda-\lambda'^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\lambda-\lambda'^2}-b\right)^2+\lambda'^2=r^2$$

$$\Rightarrow \lambda-\lambda'^2+b^2-2\sqrt{\lambda-\lambda'^2}\,b+\lambda'^2=r^2$$

180

$$\Rightarrow 2\sqrt{\lambda-\lambda'^2}\,b=\lambda+b^2-r^2$$

$$\Rightarrow 4(\lambda-\lambda'^2)b^2=(\lambda+b^2-r^2)^2$$ olur.

λ ve λ' nün değerleri yerine yazılırsa,

$$4(x^2+y^2+z^2-z^2)b^2=(x^2+y^2+z^2+b^2-r^2)^2$$

$$\Rightarrow 4(x^2+y^2)b^2=(x^2+y^2+z^2+b^2-r^2)^2$$ bulunur.

11

Örnek

$$(c) \ldots \begin{cases} y^2+4z^2=1 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{çizgisinin } \Delta \ldots \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}=t$$

etrafında dönmesiyle elde edilen dönel yüzeyin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{cases} x+2y+\lambda'=0 \\ x^2+y^2+z^2=\lambda \\ y^2+4z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{\lambda'}{2}$$

$x^2+y^2+z^2=\lambda$ dan $\frac{\lambda'^2}{4}+z^2=\lambda$

$$\Rightarrow z=\sqrt{\lambda-\frac{\lambda'^2}{4}}=\frac{\sqrt{\lambda-\lambda'^2}}{2}$$

182

12

$y^2+4z^2=1$ den

$$\frac{\lambda'^2}{4}+2(\lambda-\lambda'^2)=1$$

$$\Rightarrow \lambda'^2+8(\lambda-\lambda'^2)=4$$

$$\Rightarrow 8\lambda-7\lambda'^2=4$$

$$\Rightarrow 8(x^2+y^2+z^2)-7(x+2y)^2=4$$

$$\Rightarrow x^2-6y^2+8z^2-28xy=4 \quad \text{bulunur.}$$

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 15