1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

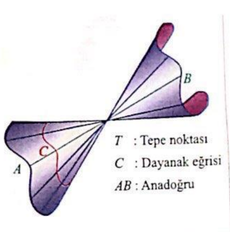
Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 14

2

KONİ YÜZEYİ



Sabit bir eğriye dayanarak hareket eden ve eğrinin düzleminde bulunmayan sabit bir noktadan geçen doğrunun oluşturduğu yüzeye koni denir. Sabit eğriye koninin dayanak eğrisi, sabit noktaya da koninin tepe noktası denir. Hareket ederek yüzeyi oluşturan doğruya da koninin anadoğrusu veya üreteci adı verilir.

Dayanak eğrisinin çember olması durumunda koniye d adı verilir.

Dairesel koni

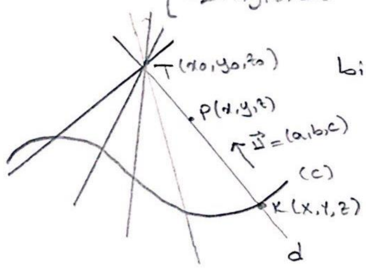
158

Koninin denkleminin elde edilmesi silindirde olduğu gibi C dayanak eğrisinin veriliş şekline göre iki durumda incelenir:

1) Tepe noktası $T=(x_0,y_0,z_0)$ ve dayanak eğrisi

$$(C)\dots\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=0\\ \varphi_2(x,y,z)=0\end{cases}$$

olan koninin denklemi şu şekilde bulunur: Koninin üzerinde herhangi bir nokta $P(x,y,z)$ olsun.



T den geçen d doğrusunun denklemi,

$$d\dots\ \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=\lambda$$

veya

$$d\dots\begin{cases}x=x_0+a\lambda\\ y=y_0+b\lambda\\ z=z_0+c\lambda\end{cases}\text{ dır.}$$

159

(C) eğrisi ile d nin arakesit noktası $K(X,Y,Z)$ olsun.

$K\in d$ olduğundan $X=x_0+a\lambda$, $Y=y_0+b\lambda$, $Z=z_0+c\lambda$

$K\in(C)$ olduğundan $\varphi_1(X,Y,Z)=0$ ve $\varphi_2(X,Y,Z)=0$ dır.

$$\Rightarrow \varphi_1(x_0+a\lambda,y_0+b\lambda,z_0+c\lambda)=0$$
$$\varphi_2(x_0+a\lambda,y_0+b\lambda,z_0+c\lambda)=0$$

bulunur. Bu sistemden λ yok edilerek a,b,c ye bağlı

$$G(a,b,c)=0$$

denklemi elde edilir. $\vec{u}=(a,b,c)=(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$ alınabilir.

Denklemde a yerine λa, b yerine λb, c yerine λc yazılırsa

$$G(\lambda a,\lambda b,\lambda c)=0$$

bulunur. Buradan da

$$G(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

elde edilir. Bu koninin denklemidir.

5

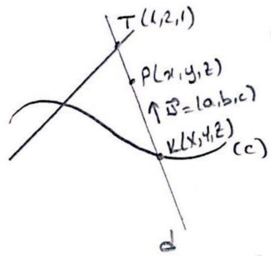
Örnek

Tepe noktası $T=(1,2,1)$ ve dayanak eğrisi

$$(c)\ldots\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1}-1=0\\ z=0\end{cases}$$

olan koninin denklemini yazınız.

Çözüm: Koni üzerinde herhangi bir nokta $P(x,y,z)$ olsun. x, y ve z ye bağlı bir denklem bulacağız. T den geçen d doğrusunun denklemi,



$$d\ldots\begin{cases}x=1+\lambda a\\ y=2+\lambda b\\ z=1+\lambda c\end{cases}$$

dir. d ile (c) eğrisinin arakesit noktası $K(X,Y,Z)$ olsun.

6

$K\in d$ olduğundan $X=1+\lambda a,\ Y=2+\lambda b,\ Z=1+\lambda c$

$K\in(c)$ olduğundan $\dfrac{X^2}{2}+\dfrac{Y^2}{1}-1=0$ ve $Z=0$ olur.

$\Rightarrow 1+\lambda c=0$ dan $\lambda=-\dfrac{1}{c}$ ve $\dfrac{(1+\lambda a)^2}{2}+(2+\lambda b)^2-1=0$

denkleminden de $\dfrac{\left(1-\frac{a}{c}\right)^2}{2}+\left(2-\frac{b}{c}\right)^2-1=0$ bulunur.

$\Rightarrow (c-a)^2+2(2c-b)^2-2c^2=0$ olur.

$\vec{u}=(a,b,c)=(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$ alınabilir.

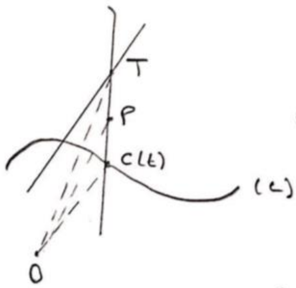
$\Rightarrow (\lambda c-\lambda a)^2-(2\lambda c-\lambda b)^2-2(\lambda c)^2=0$

$\Rightarrow (z-1-x+1)^2-(2z-2-y+2)^2-2(z-1)^2=0$

$\Rightarrow (z-x)^2-(2z-y)^2-2(z-1)^2=0$ elde edilir.

7

2) Tepe noktası $T(x_0,y_0,z_0)$ ve dayanak eğrisi $c(t)=(f(t),g(t),h(t))$ olan koninin denklemi şu şekilde bulunur:



Koni üzerinde temsilci bir nokta $P(x,y,z)$ olsun. Şekilden,

$$\vec{OP}=\vec{OC}+\vec{CP}$$

$$\Rightarrow \vec{OP}=\vec{OC}+\lambda\vec{CT}$$

$$\Rightarrow (x,y,z)=(f(t),g(t),h(t))+\lambda(x_0-f(t),y_0-g(t),z_0-h(t))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=f(t)+\lambda(x_0-f(t)) \\ y=g(t)+\lambda(y_0-g(t)) \\ z=h(t)+\lambda(z_0-h(t)) \end{cases}$$

bulunur. Bu, koninin parametrik denklemidir. Bu denklemdeki λ ve t yok edilirse koninin $F(x,y,z)=0$ şeklinde kartezyen denklemi bulunur.

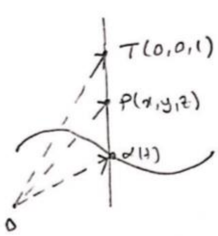
163

8

Örnek

Tepe noktası $T=(0,0,1)$ ve dayanak eğrisi $\alpha(t)=(2\cos t,1+2\sin t,0)$ olan koninin denklemini bulunuz.

Çözüm:



Koni üzerinde herhangi bir nokta $P(x,y,z)$ olsun. x, y ve z ye bağlı bir denklem bulacağız: Şekilden

$$\vec{OP}=\vec{O\alpha}+\vec{\alpha P}=\vec{O\alpha}+\lambda\vec{\alpha T}$$

$$\Rightarrow (x,y,z)=(2\cos t,1+2\sin t,0)+\lambda(-2\cos t,-1-2\sin t,1)$$

$$\Rightarrow x=2\cos t-2\lambda\cos t,\ y=1+2\sin t+\lambda(-1-2\sin t),\ z=\lambda$$

$$\Rightarrow x=2\cos t-2z\cos t,\ y=1+2\sin t+z(-1-2\sin t)$$

$$\Rightarrow \cos t=\frac{x}{2-2z},\quad \sin t=\frac{y+z-1}{2-2z} \text{ olur.}$$

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ olacağından $x^2+(y+z-1)^2-4(1-z)^2=0$ bulunur.

164

Örnek

Tepe noktası $T=(0,a,b)$ ve dayanak eğrisi

$$(c) \ldots \begin{cases} x^2+y^2-r^2=0 \\ z=0 \end{cases}$$ olan koninin denklemini bulunuz.

(cevap: $bx^2+(az-by)^2-r^2(z-b)^2=0$)

Örnek

Dayanak eğrisi $\alpha(t)=(2\cos t, 2\sin t, 0)$ ve tepe noktası $T=(3,3,4)$ olan koninin denklemini bulunuz.

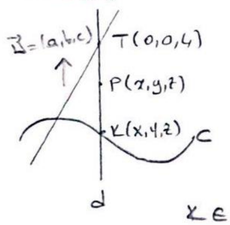
(cevap: $(4x-3z)^2+(4y-3z)^2=4(4-z)^2$)

11

Örnek

C eğrisi $x^2+y^2+z^2=5$ küresi ile $z-1=0$ düzleminin arakesitidir. Dayanak eğrisi C ve tepe noktası $T(0,0,4)$ olan koninin denklemini yazınız.

Çözüm:



Koni üzerinde herhangi bir nokta $P(x,y,z)$ olsun.

d nin denklemi,

$x=0+a\lambda,\ y=0+b\lambda,\ z=4+c\lambda$ dır.

(C) ile d nin arakesit noktası $K(X,Y,Z)$ olsun.

$K\in d \Rightarrow X=a\lambda,\ Y=b\lambda,\ Z=4+c\lambda$

$K\in (C) \Rightarrow X^2+Y^2+Z^2=5,\ Z-1=0$

$Z-1=0$ dan $3+c\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{3}{c}$

$X^2+Y^2+Z^2=5$ den $\frac{9a^2}{c^2}+\frac{9b^2}{c^2}+1=5$

$\Rightarrow 9(a^2+b^2)=4c^2$

167

12

$\vec{v}=(a,b,c)=(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$ alınabilir.

$\Rightarrow 9((\lambda a)^2+(\lambda b)^2)=4(\lambda c)^2$

$x=a\lambda,\ y=b\lambda,\ z=4+c\lambda$ olduğundan

$a\lambda=x,\ b\lambda=y,\ c\lambda=z-4$ kullanılırsa

$9(x^2+y^2)=4(z-4)^2$ bulunur.

13

Örnek

C eğrisi yarıçapı 2 birim olan merkezil küre ile merkezi (0,2,0) ve yarıçapı 2 birim olan kürenin arakesit eğrisi olan çemberdir. Dayanak eğrisi C ve tepe noktası T(0,-4,0) olan koninin denklemini bulunuz. (cevap: $25(x^2+z^2)=3(y+4)^2$)

14

Örnek

C eğrisi $z=x^2$ silindiri ile $y=2$ düzleminin arakesitidir. Dayanak eğrisi C ve tepe noktası T(0,5,0) olan koninin denklemini bulunuz. (cevap: $z(5-y)=3x^2$)

15

Örnek

$(4x-3z)^2+(4y-3z)^2=2(4-z)^2$ konisi ile

d... $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z+1}{4}=\lambda$ doğrusunun kesim noktasını bulunuz.

Çözüm:

Koni denkleminde $x=3\lambda$, $y=3\lambda$, $z=4\lambda-1$ yazılırsa

$(3-4\lambda)^2=9$

$\Rightarrow \lambda=\frac{3}{2}$ veya $\lambda=0$ bulunur.

$\lambda=0$ için $x=0, y=0, z=-1$ olup kesim noktası $A(0,0,-1)$

$\lambda=\frac{3}{2}$ için $x=\frac{9}{2}, y=\frac{9}{2}, z=5$ olup kesim noktası $B(\frac{9}{2},\frac{9}{2},5)$ olur.

16

Örnek

$8z^2=17(x^2+y^2)$ konisi ile $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1}=\lambda$ doğrusunun

kesim noktasın bulunuz.(cevap $K(-\frac{5}{4},\frac{3}{4},-\frac{17}{8})$)

17

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 14