1

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

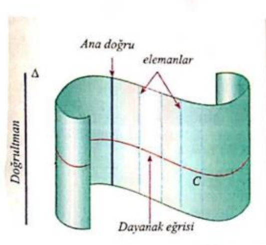
Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 13

2

SİLİNDİR YÜZEYİ



Uzayda sabit bir doğruya paralel kalarak ve sabit bir eğriye dayanarak hareket eden doğrunun oluşturduğu yüzeye silindir, sabit eğriye dayanak eğrisi, sabit doğrultuya silindirin doğrultmanı, hareket eden doğruya da silindirin ana doğrusu veya üreteci denir.

Yukarıdaki tanıma göre silindirin bir regle yüzey olduğu açıktır.

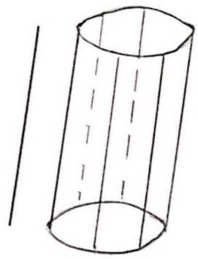
Not:

1) C eğrisi bir doğru ise silindir bir düzlem olacaktır.

(c)

O halde düzlem bir silindirdir.

143

2) 

C eğrisi bir çember ise silindir yüzeyi dairesel silindir adını alır.

Silindir Yüzeyinin Denkleminin Elde Edilmesi

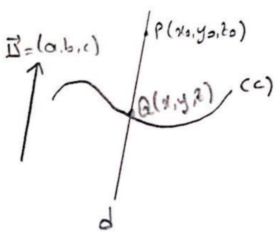
Silindirin denkleminin yazılabilmesi için doğrultman doğrusunun sabit kaldığı doğrultunun ve (C) dayanak eğrisinin verilmesi gerekir.

(C) eğrisinin verilişine göre silindirin denkleminin elde edilmesi iki türlüdür:

1) (C) eğrisi iki yüzeyin arakesit eğrisi olarak verilsin. Yani

$$(C)\ldots\begin{cases} U_1(x,y,z)=0 \\ U_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

olsun. $\vec{u}=(a,b,c)$ sabit doğrultusunu alalım. Bu durumda silindirin denkleminin nasıl bulunacağını inceleyelim: Silindire ait herhangi bir nokta $P=(x_0,y_0,z_0)$ olsun. P den geçen ve $\vec{u}$ ya paralel olan doğrunun denklemi



$$d\ldots \frac{X-x_0}{a}=\frac{Y-y_0}{b}=\frac{Z-z_0}{c}=\lambda$$

veya

$$d\ldots\begin{cases} X=x_0+a\lambda \\ Y=y_0+b\lambda \\ Z=z_0+c\lambda \end{cases}$$

şeklindedir.

Ayrıca d doğrusu ile (C) eğrisinin arakesit noktası $Q(x,y,z)$ olsun.

5

$Q \in d$ olduğundan $x = x_0 + a\lambda$, $y = y_0 + b\lambda$, $z = z_0 + c\lambda$

$Q \in (c)$ olduğundan $\varphi_1(x,y,z) = 0$, $\varphi_2(x,y,z) = 0$ olur.

Buradan

$$\varphi_1(x_0 + a\lambda, y_0 + b\lambda, z_0 + c\lambda) = 0$$
$$\varphi_2(x_0 + a\lambda, y_0 + b\lambda, z_0 + c\lambda) = 0$$

elde edilir. Son iki denklemden λ parametresi yok edilerek

$$G(x_0, y_0, z_0) = 0$$

denklemi bulunur. Bu ise silindirin denklemidir. Genel olarak denklemlerde x, y, z görmek istediğimizden x_0 yerine x, y_0 yerine y ve z_0 yerine de z alınarak

$$G(x,y,z) = 0$$

yazılabilir.

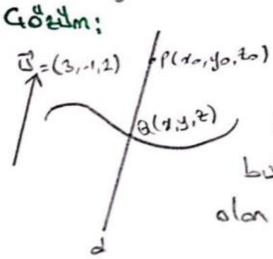
6

Örnek

$$(c) \ldots \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$ eğrisi ile $\vec{B} = (3,-1,2)$ vektörü veriliyor.

(c) yi dayanak eğrisi olarak kabul eden ve $\vec{B}$ vektörüne paralel olan doğruların oluşturduğu silindirin denklemini bulunuz.

Çözüm:



Silindir üzerinde herhangi bir nokta $P(x_0, y_0, z_0)$ olsun. İçerisinde x_0, y_0 ve z_0 bulunan bir denklem bulabilirsek silindirin denklemini bulmuş olacağız. P den geçen ve $\vec{B}$ ya paralel olan d doğrusunun denklemi,

$$d \ldots \begin{cases} X = x_0 + 3\lambda \\ Y = y_0 - \lambda \\ Z = z_0 + 2\lambda \end{cases}$$ dır.

7

Eğri ile doğrunun ortak noktası $Q(x,y,z)$ olsun.

$Q \in d$ olduğundan $x = x_0+3\lambda,\ y = y_0-\lambda,\ z = z_0+2\lambda$ dır.

$Q \in (c)$ olduğundan

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$
$$z=0$$

dır. O halde,

$$(x_0+3\lambda)^2+(y_0-\lambda)^2+(z_0+2\lambda)^2-1=0$$
$$z_0+2\lambda=0$$

İkinci denklemden $\lambda = -\frac{z_0}{2}$ bulunur. Birinci denklemde yerine yazılırsa,

$$\left(x_0-\tfrac{3}{2}z_0\right)^2+\left(y_0+\tfrac{z_0}{2}\right)^2-1=0$$
$$\Rightarrow (2x_0-3z_0)^2+(2y_0+z_0)^2-4=0$$

veya

$$(2x-3z)^2+(2y+z)^2-4=0$$

bulunur.

148

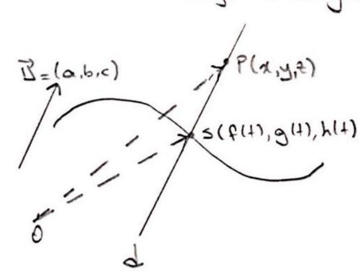
8

2) (c) eğrisi

$$(c)\ldots\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

şeklinde parametrik olarak verilsin.

$\vec{u}=(a,b,c)$ sabit doğrultusunu alalım. Bu durumda silindirin denkleminin nasıl bulunacağını inceleyelim:



Silindir üzerinde keyfi bir nokta $P(x,y,z)$ olsun. Şekilden,

$$\vec{OP} = \vec{OS}+\vec{SP}$$
$$\Rightarrow \vec{OP} = \vec{OS}+\lambda\vec{u}$$
$$\Rightarrow (x,y,z) = (f(t),g(t),h(t))+\lambda(a,b,c)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = f(t)+\lambda a \\ y = g(t)+\lambda b \\ z = h(t)+\lambda c \end{cases}$$

9

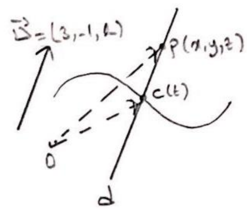
Bu silindirin parametrik denklemidir. Bu denklemde λ ve t yok edilerek silindirin $F(x,y,z)=0$ biçimindeki denklemi elde edilebilir.

Örnek

Dayanak eğrisi $(C) \ldots \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=0 \end{cases}$ olan ve $\vec{u}=(3,-1,2)$

doğrusuna paralel doğrultuyu doğrultman doğrusu kabul eden silindirin denklemini bulunuz.

Çözüm:



$C(t)=(\cos t, \sin t, 0)$

Silindir üzerinde herhangi bir $P(x,y,z)$ noktası verilsin.

$$\vec{OP}=\vec{OC}+\lambda\vec{u}$$

$$\Rightarrow (x,y,z)=(\cos t, \sin t, 0)+\lambda(3,-1,2)$$

10

$$\Rightarrow x=\cos t+3\lambda$$
$$y=\sin t-\lambda$$
$$z=2\lambda$$

Şimdi λ ve t yi yok edelim:

Son denklemden $\lambda=\frac{z}{2}$ olup ilk iki denklemden,

$$\cos t = x-\frac{3}{2}z$$

$$\sin t = y+\frac{z}{2}$$

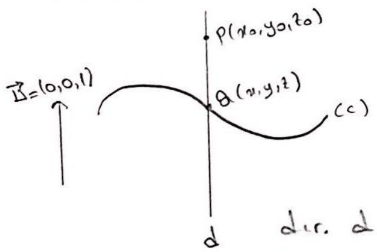
$\cos^2 t+\sin^2 t=1$ den $(x-\frac{3}{2}z)^2+(y+\frac{z}{2})^2=1$ bulunur.

11

Örnek

Dayanak eğrisi $(c) \ldots \begin{cases} x^2+y^2-R^2=0 \\ z=0 \end{cases}$ ve doğrultman doğrusu z eksenine paralel olan silindirin denklemini bulunuz.

Çözüm:



Silindir üzerinde keyfi bir nokta $P(x_0,y_0,z_0)$ olsun. P den geçen ve $\vec{u}$ ya paralel olan d doğrusunun denklemi

$d \ldots X=x_0,\ Y=y_0,\ Z=z_0+\lambda$

dır. d ile C nin ortak noktası $Q(x,y,z)$ olsun.

$Q \in d \Rightarrow x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0+\lambda$

$Q \in (C) \Rightarrow x^2+y^2-R^2=0,\ z=0$

12

$\Rightarrow x_0^2+y_0^2=R^2,\ z_0=-\lambda$

O halde silindirin denklemi, $x^2+y^2=R^2,\ z=\lambda$ olur.

Bu ise dairesel silindir denklemidir.

Örnek

Doğrultman doğrusu $\vec{u}=(1,1,1)$ doğrultusuna paralel olan ve

$(c) \ldots \begin{cases} x^2+y^2-a^2=0 \\ z-b=0 \end{cases}$ eğrisini dayanak eğrisi kabul eden silindirin

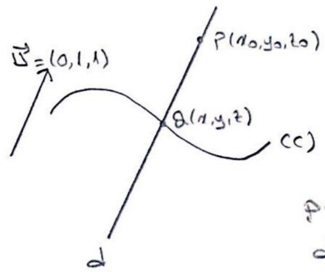
denklemini yazınız.

13

Örnek

$x^2+y^2+z^2=9$ küresi ile $y+z=3$ düzleminin arakesit eğrisi C olsun. Dayanak eğrisi C ve doğrultmanı $\vec{u}=(0,1,1)$ olan silindirin denklemini yazınız.

Çözüm:



$$(C)\ldots\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y+z=3 \end{cases}$$ ile verilmiş.

Silindir üzerinde herhangi bir nokta $P(x_0,y_0,z_0)$ olsun. P den geçen ve $\vec{u}$ ya paralel olan d doğrusunun denklemi,

$$d\ldots \frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z_0}{1}=\lambda$$

$$\Rightarrow d\ldots\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0+\lambda \\ z=z_0+\lambda \end{cases}$$

154

14

d ile (C) nin arakesit noktası $Q(x,y,z)$ olsun.

$Q\in d \Rightarrow x=x_0,\ y=y_0+\lambda,\ z=z_0+\lambda$

$Q\in (C) \Rightarrow x^2+y^2+z^2=9,\ y+z=3$

$$\Rightarrow x_0^2+(y_0+\lambda)^2+(z_0+\lambda)^2=9,\quad y_0+\lambda+z_0+\lambda=3$$

$$\Rightarrow x_0^2+(y_0+\lambda)^2+(z_0+\lambda)^2=9,\quad \lambda=\frac{1}{2}(3-y_0-z_0)$$

$$\Rightarrow x_0^2+\left[y_0+\frac{1}{2}(3-y_0-z_0)\right]^2+\left[z_0+\frac{1}{2}(3-y_0-z_0)\right]^2=9$$

$$\Rightarrow x_0^2+\left(\frac{1}{2}y_0-\frac{1}{2}z_0+\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}y_0+\frac{1}{2}z_0+\frac{3}{2}\right)^2=9$$

bulunur.

15

Örnek

Dayanak eğrisi $\alpha(t)=(t,t^2,0)$ ve doğrultmanı da $3x+2y-5z=3$ ile $x-2y+z=1$ düzlemlerinin arakesit doğrusu olan silindirin denklemini bulunuz.

Çözüm:

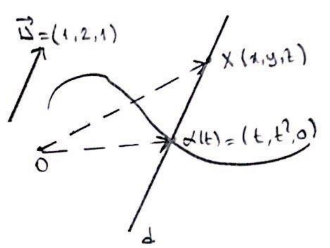
Önce doğrultmanın denklemini bulalım:

$\begin{cases} 3x+2y-5z-3=0 \\ x-2y+z-1=0 \end{cases}$ sisteminde $z=t$ alınırsa $x=1+t$ ve $y=2t$ bulunur. O halde doğrultman doğrusu

$$d \ldots \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$$

olup bu doğrunun doğrultmanı $\vec{u}=(1,2,1)$ dir.

16



$$\vec{OX}=\vec{O\alpha}+\lambda\vec{u}$$

$$\Rightarrow (x,y,z)=(t,t^2,0)+\lambda(1,2,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=t+\lambda \\ y=t^2+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

1\. denklemden $x=t+z$ olup $t=x-z$ dir.

2\. denklemden $y=(x-z)^2+2z$

$$\Rightarrow y=x^2+z^2$$

17

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 13