1

UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

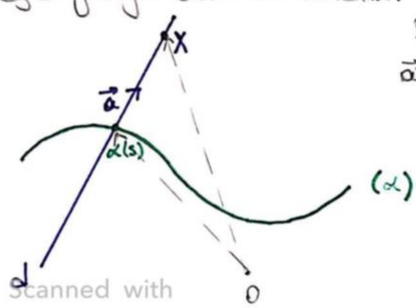
Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 12

2

REGLE YÜZEYLER (DOĞRUSAL YÜZEYLER)

Bir doğrunun bir eğri boyunca hareketi sonucu oluşan yüzeye **regle yüzey**, yüzeyi oluşturan doğruya yüzeyin **doğrultmanı** ve eğriye de yüzeyin **dayanak eğrisi** denir. O halde regle yüzey için doğrulardan oluşmuş bir yüzeydir yani bir doğru ailesidir diyebiliriz. Şimdi bir d doğrusunun (α) eğrisi boyunca hareketi ile elde edilen regle yüzeyin denklemini bulalım:



Doğrunun birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olsun. Yüzey üzerinde keyfi bir nokta X ise

$$\vec{X}=\vec{\alpha}+v\,\vec{a}$$ yazılabilir.

O halde yüzeyin denklemi

$$X(s,v)=\alpha(s)+v\,a(s)$$ olur.

133

3

Örnek

$\vec{a} = (1,2,3)$ vektörünün $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ eğrisi boyunca hareketi ile elde edilen regle yüzeyin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + v\vec{a}(s)$$

$$\Rightarrow \varphi(s,v) = (\cos s, \sin s, s) + v(1,2,3)$$

$$= (v+\cos s,\ 2v+\sin s,\ 3v+s) \text{ olur.}$$

Örnek

Parametrik denklemi $\alpha(t) = (2t, t^3, t^2-1)$ olan eğrinin teğetlerinin eğri boyunca hareketi ile elde edilen regle yüzeyin denklemini yazınız.

Çözüm:

Eğrinin teğeti $\alpha'(t) = (2, 3t^2, 2t)$ doğrultusundadır.

$$\varphi(t,v) = \alpha(t) + v\alpha'(t) = (2t, t^3, t^2-1) + v(2, 3t^2, 2t)$$

$$\Rightarrow \varphi(t,v) = (2t+2v,\ t^3+3t^2v,\ t^2-1+2vt) \text{ olur.}$$

4

Örnek

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ denklemli tek kanatlı hiperboloid yüzeyinin bir regle yüzey olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} = \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = \lambda$$

5

$$\Rightarrow \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right) \quad \ldots (1)$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right) \quad \ldots (2)$$

bulunur. (1) ve (2) denklemleri λ nın her değeri için bir düzlem belirtir. Bu iki düzlemin arakesiti de bir doğrudur. Yani yüzeyimiz doğrulardan oluşmaktadır. (1) ve (2) denklemlerinin arakesiti yüzeyi verecektir.

6

Örnek

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ hiperbolik paraboloidinin bir regle yüzey olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \Rightarrow \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{2}=\frac{z}{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}=\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\lambda \quad \ldots (1)$$

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{\lambda}z \quad \ldots (2)$$

bulunur. (1) ve (2) nin ortak çözümü yüzeyi verecektir. Bu denklemler λ nın her değeri için bir düzlem belirtir. Bu iki düzlemin arakesiti de bir doğrudur. Yani yüzeyimiz doğrulardan oluşmaktadır. Yani regle yüzeydir.

Örnek

$d_1 \ldots \begin{cases} y=4x-1 \\ z=1 \end{cases}$ ve $d_2 \ldots \begin{cases} y=-x+2 \\ z=-3 \end{cases}$ doğrularından geçen ve

birbirine ortogonal olan düzlemlerin arakesit doğrularının oluşturduğu regle yüzeyin denklemini bulunuz.

Çözüm:

d_1 doğrusundan geçen düzlem demetinin denklemi,

$$4x-y-1+k(z-1)=0 \quad , k\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 4x-y+kz-1-k=0$$

d_2 doğrusundan geçen düzlem demetinin denklemi,

$$x+y-2+n(z+3)=0 \quad , n\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x+y+nz-2+3n=0$$

Düzlemler ortogonal olacağından $\vec{n_1}=(4,-1,k)$, $\vec{n_2}=(1,1,n)$ için $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$ dır. Buradan $kn+3=0$ bulunur.

138

$4x-y-1+k(z-1)=0$ dan $k=\dfrac{4x-y-1}{z-1}$ ve

$x+y-2+n(z+3)=0$ dan $n=\dfrac{x+y-2}{z+3}$

olup $kn+3=0$ da yerine yazılıp düzenlenirse

$$(4x-y-1)(x+y-2)+3(z-1)(z+3)=0$$

denklemi bulunur. Bu ise istenen regle yüzeyin denklemi olur.

Not: Verilen bir yüzeyin regle yüzey olmasının koşulunu ifade edelim:
Verilen $U(x,y,z)=0$ yüzeyi üzerinde bir nokta $P=(x_0,y_0,z_0)$ olsun.
Eğer yüzeyimiz regle yüzey ise $P=(x_0,y_0,z_0)$ noktasından geçen ve bu yüzey içinde kalan bir doğru daima vardır. P den geçen d doğrusunun denklemi,

$$d \ldots \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

olsun. d doğrusunun varlığını söylemek için a,b ve c nin var olduğunu söylemeliyiz. d nin yüzey üzerinde yatmasını istediğimizden

$$U(x,y,z) = U(x_0+at,\, y_0+bt,\, z_0+ct) = 0$$

denkleminden a,b ve c yi bulmalıyız. Bu durumda yüzey bir regle yüzeydir.

Örnek

$z^3 - x + y - z = 0$ yüzeyi bir regle yüzey midir?

Çözüm:

Yüzey üzerinde bir nokta $P=(x_0,y_0,z_0)$ olsun. P den geçen ve yüzey üzerinde yatan bir doğru olup olmadığını araştıracağız.
P den geçen bir doğru

$$d \ldots \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

olsun. a,b ve c yi bulabilirsek böyle bir doğru var demektir.
Doğru yüzey üzerinde yatacağından yüzeyin denklemini sağlamalıdır.

$$\Rightarrow (z_0+ct)^3 - (x_0+at) + (y_0+bt) - (z_0+ct) = 0$$

11

$$\Rightarrow ct^3 + 3z_0c^2t^2 + (3z_0^2c - a + b - c)t + z_0^3 - x_0 + y_0 - z_0 = 0$$

olur. $P(x_0, y_0, z_0)$ noktası $z^3 - x + y - z = 0$ yüzeyinin üzerinde olduğundan

$z_0^3 - x_0 + y_0 - z_0 = 0$ dır. Böylece

$$ct^3 + 3z_0c^2t^2 + (3z_0^2c - a + b - c)t = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik $\forall t$ için doğru olduğundan,

$$c = 0, \quad 3z_0c^2 = 0, \quad 3z_0^2c - a + b - c = 0$$

$$\Rightarrow c = 0, \quad a = b \text{ bulunur.}$$

O halde yüzey üzerinde alınan herhangi bir P noktası için P den geçen ve yüzey üzerinde yatan bir doğru vardır. Yani yüzey doğrulardan meydana gelmiştir. O halde regle yüzeydir.

12

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 12