1

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

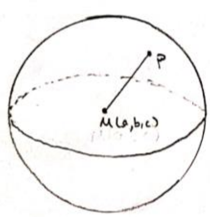
Ders 11

2

KÜRE YÜZEYİ

Uzayda verilen bir sabit noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine küre denir. Sabit noktaya kürenin merkezi, sabit uzaklığa da kürenin yarıçapı adı verilir.

Merkezi $M(a,b,c)$ ve yarıçapı r olan kürenin denklemini bulalım:



Küre yüzeyi üzerinde herhangi bir $P(x,y,z)$ noktası verilsin.

$\|MP\| = r \Rightarrow \|MP\|^2 = r^2$ olacağından

$$\langle \vec{MP}, \vec{MP} \rangle = r^2$$

$$\Rightarrow \langle (x-a, y-b, z-c), (x-a, y-b, z-c) \rangle = r^2$$

$$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$ küre denklemi

elde edilir. Bu ifade açılır ve düzenlenirse,

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0$$

bulunur. $D=-2a$, $E=-2b$, $F=-2c$, $G=a^2+b^2+c^2-r^2$ alınırsa

Küre denklemi,

$$x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

şeklinde bulunur. Kürenin merkezi $M(a,b,c)=\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2},-\frac{F}{2}\right)$ dir.
Yarıçapı ise $G=a^2+b^2+c^2-r^2$ den $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2+F^2-4G}$ olur.

Örnek

Merkezi $M(1,-1,2)$ ve yarıçapı $r=3$ olan kürenin denklemini yazınız.

Çözüm:

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0 \quad \text{bulunur.}$$

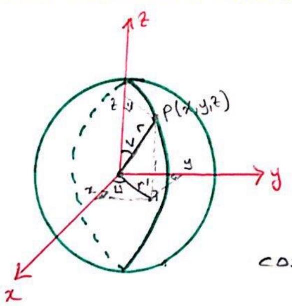
Örnek

$x^2+y^2+z^2-4x+2y=0$ küresinin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Çözüm:

$M(2,-1,0)$, $D=-4, E=2, F=0, G=0$ $\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2+F^2-4G}=\sqrt{5}$

Kürenin Parametrik Denklemi



$$\cos u=\frac{x}{r'} \Rightarrow x=r'\cos u$$

$$\sin u=\frac{y}{r'} \Rightarrow y=r'\sin u$$

$$\cos v=\frac{z}{r} \Rightarrow z=r\cos v$$

$$\sin v=\frac{r'}{r} \Rightarrow r'=r\sin v$$

O halde, $x=r\cos u\sin v$, $y=r\sin u\sin v$, $z=r\cos v$ olur. Kürenin parametrik denklemi,

$$\phi(u,v)=(r\cos u\sin v,\ r\sin u\sin v,\ r\cos v)$$ elde edilir.

5

Bir Küre ile Bir Doğrunun Durumu

$x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ küresi ile $d \dots \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=\lambda$ doğrusu verilsin. Doğru ile kürenin birbirine göre durumunu incelemek için bu iki denklem ortak çözülürse,

$$(x_0+\lambda a)^2+(y_0+\lambda b)^2+(z_0+\lambda c)^2+D(x_0+\lambda a)+E(y_0+\lambda b)+F(z_0+\lambda c)+G=0$$

ve bu denklem düzenlenirse λ ya göre 2. dereceden olan

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0$$

denklemi elde edilir. $\delta=B^2-4AC$ olmak üzere

1) $\delta>0$ ise denklemin iki kökü vardır. Yani doğru küreyi iki noktada keser.

2) $\delta=0$ ise denklemin çakışık iki kökü vardır. Yani doğru küreyi tek noktada keser. Bu durumda doğru küreye teğettir.

3) $\delta<0$ ise denklemin reel kökü yoktur. Yani doğru küreyi kesmez.

127

6

Örnek

$x=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}=\lambda$ doğrusu ile $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4$ küresinin arakesitini inceleyiniz.

Çözüm:

$x=\lambda,\ y=2\lambda+1,\ z=3\lambda+2$ ifadeleri küre denkleminde yazılırsa, $\lambda^2+(2\lambda-2)^2+9\lambda^2=4$ burada da $7\lambda^2-4\lambda=0$ bulunur. O halde, $\lambda=0$ ve $\lambda=\frac{4}{7}$ dir.

$\lambda=0$ için $x=0, y=1, z=2$ olup kesim noktası $K_1(0,1,2)$

$\lambda=\frac{4}{7}$ için $x=\frac{4}{7}$, $y=\frac{15}{7}$, $z=\frac{26}{7}$ olup kesim noktası $K_2\left(\frac{4}{7},\frac{15}{7},\frac{26}{7}\right)$ olur.

7

Örnek

$x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+2=0$ küresi ile $d \ldots \frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{1}=\lambda$ doğrusunun birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$x=2\lambda$, $y=3\lambda+1$, $z=\lambda-1$ ifadesi küre denkleminde yazılırsa,
$4\lambda^2+(3\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2+4\lambda+4(3\lambda+1)-6(\lambda-1)+2=0$ bulunur.

Bu ifade düzenlenirse,

$$\lambda^2+\lambda+1=0 \quad \text{elde edilir.}$$

$\delta=-3<0$ olup denklemin kökü yoktur.

O halde doğru küreyi kesmez.

8

Örnek

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+6=0$ küresi ile $\frac{x}{2}=y=z=\lambda$ doğrusunun birbirine göre durumunu inceleyiniz. (cevap : doğru küreye $P(2,1,1)$ noktasında teğettir)

9

Bir Küre ile Bir Düzlemin Durumu

$x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+F+G=0$ küresi ile $ax+by+cz+d=0$ düzleminin birbirine göre durumunu incelemek için denklemleri ortak çözülür. Bunun sonucunda arakesit,

1) Bir çemberdir,

2) Bir noktadır. (Bu durumda düzlem küreye teğettir)

3) Boş kümedir. (Bu durumda düzlem küreyi kesmez)

Örnek

$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-4=0$ küresinin xoy düzlemiyle arakesitini bulunuz.

Çözüm:

Küre denkleminde $z=0$ yazılırsa $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ olur. Bu ise merkezi $M(-1,2,0)$ ve yarıçapı $r=3$ olan çemberdir.

10

Örnek

$x^2+y^2+z^2-2x+y-z-3=0$ küresinin $T(1,1,-1)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+y-z-3=0$ alalım.

$$\vec{\nabla} f\Big|_T = (2x-2,\ 2y+1,\ 2z-1)\Big|_T = (2T_1-2,\ 2T_2+1,\ 2T_3-1)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f\Big|_T = \vec{n} = (0,3,-3)$$ olup düzlemin denklemi

$$0x+3y-3z+d=0$$ dır.

T düzleme ait olduğundan,

$$3+3+d=0 \Rightarrow d=-6$$

$$\Rightarrow y-z-2=0$$ bulunur.

11

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 11