ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 9

Teorem 16. (Euler Teoremi)

M, E^n de bir hiperyüzey, $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ M nin asli eğrilikleri ve bu asli eğriliklere karşılık gelen asli eğrilik doğrultularından oluşan ortonormal sistem de $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}\}$ olsun. $X_p \in T_M(p)$ tanjant vektörü için X_p ile $X_1|_p, X_2|_p, \ldots, X_{n-1}|_p$ arasındaki açılar, sırasıyla, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ ise M nin X_p doğrultusundaki normal eğriliği,

$$\kappa_n(X_p) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(p) \cos^2\theta_i \text{ dir.}$$

İspat:

$\{X_1|_p, X_2|_p, \ldots, X_{n-1}|_p\}$ $T_M(p)$ nin bazı olduğundan $X_p \in T_M(p)$ için

$$X_p = \sum_{i=1}^{n-1} a_i X_i|_p \quad \text{yazılabilir.}$$

3

$$\langle X_p, X_j|_p\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n-1} a_i X_i|_p, X_j|_p\Big\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \underbrace{\langle X_i|_p, X_j|_p\rangle}_{\delta_{ij}} = a_j$$

$\Rightarrow a_i = \langle X_p, X_i|_p\rangle$ olur.

$$\Rightarrow X_p = \sum_{i=1}^{n-1} a_i X_i|_p = \sum_{i=1}^{n-1} \langle X_p, X_i|_p\rangle X_i|_p = \sum_{i=1}^{n-1} \cos\theta_i X_i|_p \text{ olur.}$$

Genelliği bozmayacağından burada X_p birim vektör alınmıştır.

$$k_n(X_p) = \langle S(X_p), X_p\rangle$$

$$= \Big\langle S\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\cos\theta_i X_i|_p\Big), \sum_{j=1}^{n-1}\cos\theta_j X_j|_p\Big\rangle$$

$$= \Big\langle \sum_{i=1}^{n-1}\cos\theta_i \underbrace{S(X_i|_p)}_{k_i X_i|_p}, \sum_{j=1}^{n-1}\cos\theta_j X_j|_p\Big\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n-1} k_i \cos\theta_i \cos\theta_j \underbrace{\langle X_i|_p, X_j|_p\rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} k_j \cos^2\theta_j$$

4

Euler Teoreminin E^3 deki karşılığı aşağıda verilmiştir:

Teorem 17. (Euler Teoremi)

M, E^3 de bir yüzey, $k_1|_p$ ve $k_2|_p$, M nin $p\in M$ deki asli eğrilikleri, X_1 ve X_2 de bu asli eğriliklere karşılık gelen birim asli doğrultular olsun. $X_p \in T_M(p)$ için X_p ile $X_1|_p$ arasındaki açı θ olmak üzere M nin X_p doğrultusundaki normal eğriliği

$$k_n(X_p) = k_1|_p \cos^2\theta + k_2|_p \sin^2\theta \text{ dır.}$$

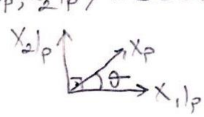
İspat:

Genelliği bozmadan X_p birim vektör alınabilir.

$\{X_1|_p, X_2|_p\}$ $T_M(p)$ için ortonormal baz olduğundan

$$X_p = a X_1|_p + b X_2|_p$$

$\Rightarrow \langle X_p, X_1|_p\rangle = a = \cos\theta$, $\langle X_p, X_2|_p\rangle = b = \cos(90-\theta) = \sin\theta$ dır.



102

5

O halde $X_p = aX_1|_p + bX_2|_p = \cos\theta X_1|_p + \sin\theta X_2|_p$ olur.

$$k_n(X_p) = \langle S(X_p), X_p \rangle$$
$$= \langle S(\cos\theta X_1|_p + \sin\theta X_2|_p), \cos\theta X_1|_p + \sin\theta X_2|_p \rangle$$
$$= \langle \cos\theta \underbrace{S(X_1|_p)}_{k_1 X_1|_p} + \sin\theta \underbrace{S(X_2|_p)}_{k_2 X_2|_p}, \cos\theta X_1|_p + \sin\theta X_2|_p \rangle$$
$$= k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \text{ olur.}$$

6

Olin-Rodrigues Formülleri

M, E^n de bir hiperyüzey, $P \in M$ deki asli eğrilikler $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ ve bunlara karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları da $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ olsun.

$$\begin{cases} D_{X_1} N = k_1 X_1 \\ D_{X_2} N = k_2 X_2 \\ \vdots \\ D_{X_{n-1}} N = k_{n-1} X_{n-1} \end{cases}$$

formüllerine Olin-Rodrigues Formülleri denir.

Dupin Göstergesi

M, E^n de bir hiperyüzey olsun.

$$\tilde{D} = \{ X_p \in T_M(p) \mid \langle S(X_p), X_p \rangle = \mp 1 \}$$

alt kümesine M nin $P \in M$ deki Dupin Göstergesi denir.

106

7

E^3 de Bir Yüzeyin Noktalarının Sınıflandırılması

M, E^3 de bir yüzey, k ve h M nin farklı asli eğrilikleri ve X_p ile Y_p de bunlara karşılık gelen birim asli doğrultular olsun. O halde $\{X_p, Y_p\}$ $T_M(P)$ için ortonormal bazdır.

$S(X_p)=kX_p$, $S(Y_p)=hY_p$ olup $\forall W_p \in T_M(P)$ için

$W_p = xX_p + yY_p$ yazılabilir.

$\langle S(W_p), W_p\rangle = hx^2+ky^2$ bulunur. Böylece $\{X_p, Y_p\}$ ortonormal bazına göre Dupin Göstergesi

$\tilde{D} = \{W_p \in T_M(P) \mid \langle S(W_p), W_p\rangle = kx^2+hy^2 = \mp 1,\ x,y \in \mathbb{R}\}$ olur.

O halde Dupin Göstergesi $hx^2+ky^2=\mp 1$ denklemli bir koniğe karşılık gelir. M nin Gauss eğriliği $K(P)=hk$ olduğundan $K(P)$ nin işaretine göre koniği sınıflandırabiliriz:

8

1) $K(P)=hk>0$ olsun. h ve k aynı işaretli olacağından $\tilde{D}_p$ nin denklemi $kx^2+hy^2=\mp 1$ formundadır. Yani Dupin Göstergesi elips sınıfındandır. O halde P nin komşuluğunda $T_M(P)$ ye paralel bir düzlem ile M nin arakesiti elipstir. $P\in M$ ye bir eliptik nokta denir.

2) $K(P)=hk<0$ olsun. h ile k zıt işaretli olacağından $\tilde{D}_p$ nin denklemi $kx^2-hy^2=\mp 1$ olur. Bu eğriler hiperbollerdir. Bu durumda $P\in M$ ye hiperbolik nokta denir.

3) $K(P)=hk=0$ olsun. Bu durumda $h=0$ veya $k=0$ dır.

a- $k=0$, $h>0$ olsun. $\tilde{D}_p$ nin denklemi $hy^2=1$ veya $y=\mp\frac{1}{\sqrt{h}}$ olup paralel iki doğrudur. Bu durumda $P\in M$ ye parabolik nokta denir.

b- $k>0$, $h=0$ ise $\tilde{D}_p$ nin denklemi $x=\mp\frac{1}{\sqrt{k}}$ olup P parabolik noktadır.

c- $h=0$, $k=0$ olsun. Bu durumda $S=0$ dır. Yani P noktası flat (düzlemsel) noktadır.

106

9

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 9