1

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 8

2

PROBLEMLER

1) M, E^3 de bir yüzey ve $\vec{V}_p, \vec{W}_p \in T_M(p)$ olsun.

a) $S(\vec{V}_p) \times S(\vec{W}_p) = K(p)\,(\vec{V}_p \times \vec{W}_p)$

b) $S(\vec{V}_p) \times \vec{W}_p + \vec{V}_p \times S(\vec{W}_p) = 2H(p)\,\vec{V}_p \times \vec{W}_p$ dir.

ÇÖZÜM:

$\{\vec{W}_p, \vec{V}_p\}$ lineer bağımlı ise $\vec{W}_p = \lambda \vec{V}_p$ olacağından eşitlikler açılırsa $\vec{0} = \vec{0}$ elde edilir. $\{\vec{W}_p, \vec{V}_p\}$ lineer bağımsız ise $T_M(p)$ nin bazını oluştururlar. Bu durumda $S(\vec{W}_p) = a\vec{W}_p + b\vec{V}_p$, $S(\vec{V}_p) = c\vec{W}_p + d\vec{V}_p$ yazılabilir.

Bu durumda S nin matrisi $S = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ olup $K(p) = ad - bc$ ve $H(p) = \frac{1}{2}(a+d)$ dir.

a)
$$S(\vec{V}_p) \times S(\vec{W}_p) = (c\vec{W}_p + d\vec{V}_p) \times (a\vec{W}_p + b\vec{V}_p)$$
$$= ac\,\underbrace{\vec{W}_p \times \vec{W}_p}_{0} + bc\,\underbrace{\vec{W}_p \times \vec{V}_p}_{-\vec{V}_p \times \vec{W}_p} + ad\,\vec{V}_p \times \vec{W}_p + bd\,\underbrace{\vec{V}_p \times \vec{V}_p}_{0}$$
$$= (ad - bc)\,\vec{V}_p \times \vec{W}_p = K(p)\,(\vec{V}_p \times \vec{W}_p)$$

8

3

b) $S(\vec{V}_p) \times \vec{U}_p + \vec{V}_p \times S(\vec{U}_p) = (c\vec{U}_p + d\vec{V}_p) \times \vec{U}_p + \vec{V}_p \times (a\vec{U}_p + b\vec{V}_p)$

$= d(\vec{V}_p \times \vec{U}_p) + a(\vec{V}_p \times \vec{U}_p)$

$= (a+d)(\vec{V}_p \times \vec{U}_p)$

$= 2H(P)(\vec{V}_p \times \vec{U}_p)$

4

2) $\phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$ parametrik denklemi ile verilen $\phi(E^2)$ nin yüzey olduğunu gösteriniz. $v=0$ için parametre eğrisinin T, N, B Frenet vektörlerini bulunuz.

Çözüm:

$\{\phi_u, \phi_v\}$ lineer bağımsız olmalıdır.

$\phi_u = (\cos v, \sin v, 2u)$, $\phi_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$

$\lambda_1 \phi_u + \lambda_2 \phi_v = 0$ olsun. O halde, $\lambda_1 \cos v - \lambda_2 u \sin v = 0$

$\lambda_1 \sin v + \lambda_2 u \cos v = 0$

$2\lambda_1 \cos v = 0$

ilk iki denklemden $\lambda_1 = 0$ dır. Birinci denklem

$\Rightarrow \lambda_2 u \sin v = 0$, $\lambda_2 u \cos v = 0$ olur.

$u \neq 0$ ise $\lambda_2 = 0$ olup sistem lineer bağımsız ve ϕ yüzeydir.

$u=0$ yüzey üzerinde $(0,0,0)$ noktasına karşılık gelir.

O halde $\phi(E^2) - \{(0,0,0)\}$ yüzeydir.

5

$v=0$ için $\phi(u,0) = \alpha(u) = (u,0,u^2)$ dir.

$\alpha'(u) = (1,0,2u)$ olup $\|\alpha'(u)\| = \sqrt{1+4u^2}$ dir. O halde u yay-par. değildir.

$$T(u) = \frac{\alpha'(u)}{\|\alpha'(u)\|}, \quad N(u) = B(u)\times T(u) \text{ ve } B(u) = \frac{\alpha'(u)\times\alpha''(u)}{\|\alpha'(u)\times\alpha''(u)\|}$$

formüllerinden $T(u) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(1,0,2u)$, $B(u) = (0,-1,0)$, $N(u) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(-2u,0,1)$

bulunur.

6

3) $\phi: E^2 \to E^3$, $\phi(u,v) = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$ ile tanımlanan $M = \phi(E^2)$ yüzeyinin şekil operatörüne karşılık gelen matrisi bulunuz.

Çözüm:

$\phi_u = (-\sin u\cos v, \cos u\cos v, 0)$, $\phi_v = (-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, \cos v)$ olup $\phi_u \perp \phi_v$ olduğundan $\{\phi_u, \phi_v\}$ lineer bağımsızdır. boy $\chi(M) = 2$ ve $\{\phi_u, \phi_v\}$ lineer bağımsız olduğundan $\{\phi_u, \phi_v\}$ $\chi(M)$ için bazdır.

$\phi_u \times \phi_v = (\cos u\cos^2 v, \sin u\cos^2 v, \sin v\cos v)$, $\|\phi_u\times\phi_v\| = \cos v$

$\Rightarrow N = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$ olur.

$S(\phi_u) = D_{\phi_u}N = \frac{dN}{du} = (-\sin u\cos v, \cos u\cos v, 0) = 1\phi_u + 0\phi_v$

$S(\phi_v) = D_{\phi_v}N = \frac{dN}{dv} = (-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, \cos v) = 0\phi_u + 1\phi_v$ olup

S nin matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

91

7

4) $M=\{(x,y,z)\in E^3 \mid x^2+y^2-9=0\}$ silindirinin şekil operatörüne karşılık gelen matrisi bulunuz.

Çözüm:

$f(x,y,z)=x^2+y^2-9=0$ alalım. $\vec{\nabla} f=(2x,2y,0)$, $\|\vec{\nabla} f\|=6$ olup

$N=\frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}=\left(\frac{x}{3},\frac{y}{3},0\right)$ olur. $X=(0,0,x)$, $Y=(-y,x,0)$ seçilirse

$X\perp N$ ve $Y\perp N$ olup $X,Y\in \chi(M)$ dir. $\{X,Y\}$ $\chi(M)$ için baz olur.

$S(X)=D_X N=\left(X\left[\frac{x}{3}\right],X\left[\frac{y}{3}\right],X[0]\right)=(0,0,0)=0X+0Y$

$S(Y)=D_Y N=\left(Y\left[\frac{x}{3}\right],Y\left[\frac{y}{3}\right],Y[0]\right)=\left(-\frac{y}{3},\frac{x}{3},0\right)=0X+\frac{1}{3}Y$

O halde S nin matrisi $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ olur.

8

5) $M=\{(x,y,z)\in E^3 \mid x^2+y^2+z^2-4=0\}$ küresinin şekil operatörüne karşılık gelen matrisi bulunuz.

Çözüm:

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4=0$ alalım. $\vec{\nabla} f=(2x,2y,2z)$, $\|\vec{\nabla} f\|=4$ olup

$N=\left(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}z\right)$ olur.

$X=(-y,x,0)$, $Y=(-z,0,x)$ alınırsa $\{X,Y\}$ $\chi(M)$ için bazdır.

$S(X)=D_X N=\left(X\left[\frac{1}{2}x\right],X\left[\frac{1}{2}y\right],X\left[\frac{1}{2}z\right]\right)=\left(-\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x,0\right)=\frac{1}{2}X+0Y$

$S(Y)=D_Y N=\left(Y\left[\frac{1}{2}x\right],Y\left[\frac{1}{2}y\right],Y\left[\frac{1}{2}z\right]\right)=\left(-\frac{1}{2}z,0,\frac{1}{2}x\right)=0X+\frac{1}{2}Y$

O halde S nin matrisi $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ olur.

9

6) $\phi : E^2 \to E^3$, $\phi(u,v) = \big((3+\cos v)\cos u, (3+\cos v)\sin u, \sin v\big)$ ile tanımlanan $M = \phi(E^2)$ yüzeyinin şekil operatörüne karşılık gelen matrisi bulunuz.

Çözüm:

$\phi_u = \big(-(3+\cos v)\sin u, (3+\cos v)\cos u, 0\big)$, $\phi_v = \big(-\sin v\cos u, -\sin v \sin u, \cos v\big)$

$\{\phi_u, \phi_v\}$ $\chi(M)$ için ortogonal bazdır.

$$N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$$

$$S(\phi_u) = D_{\phi_u} N = \frac{\partial N}{\partial u} = (-\sin u\cos v, \cos u\cos v, 0) = \frac{\cos v}{3+\cos v}\phi_u + 0\phi_v$$

$$S(\phi_v) = D_{\phi_v} N = \frac{\partial N}{\partial v} = (-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, \cos v) = 0\phi_u + 1\phi_v$$

O halde S nin matrisi $\begin{bmatrix} \frac{\cos v}{3+\cos v} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur.

10

7) $x^2+y^2 = 2z$ eliptik paraboloidinin

a) Parametrik denklemini,

b) Birim normal vektör alanını,

c) $P(1,-1,1)$ noktasındaki birim normal vektörünü,

d) $P(1,-1,1)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

Çözüm:

a) $\phi(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{2}(u^2+v^2)\right)$

b) $f(x,y,z) = x^2+y^2-2z = 0$, $\vec{\nabla} f = (2x, 2y, -2)$, $\|\vec{\nabla} f\| = \sqrt{2z+1}$

$\Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2z+1}}(x, y, -1)$

c) $N_p = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{\sqrt{3}}{3}z + d = 0$ P için $d = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow x - y - z - 1 = 0$ olur.

11

8) $M=\{(x,y,z)\in E^3 \mid y^2+z^2=1\}$ silindiri üzerinde $\alpha(t)=(t,\cos t,\sin t)$ eğrisi veriliyor. α nın M üzerinde geodezik olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

$f(x,y,z)=y^2+z^2-1,\quad \vec{\nabla} f=(0,2y,2z)\ ,\ \|\vec{\nabla} f\|=2$

$\Rightarrow N=(0,y,z)\ \Rightarrow\ N\big|_{\alpha(t)}=(0,\cos t,\sin t)$

$\alpha'(t)=(1,-\sin t,\cos t)\ ,\quad \alpha''(t)=(0,-\cos t,-\sin t)$

$\Rightarrow \alpha''(t)=-N\big|_{\alpha(t)}$

$\Rightarrow \alpha''(t)=\lambda N\big|_{\alpha(t)}$

$\Rightarrow \alpha$ geodeziktir.

12

9) $M=\{(x,y,z)\in E^3 \mid x^2+z^2=9\}$ silindirinin Gauss dönüşümü altındaki küresel resmini bulunuz.

Çözüm:

$f(x,y,z)=x^2+z^2-9=0,\quad \vec{\nabla} f=(2x,0,2z)\ ,\ \|\vec{\nabla} f\|=6$

$\Rightarrow N=\left(\frac{x}{3},0,\frac{z}{3}\right)$ olur.

$\eta: M \longrightarrow S^2$ idi.

$P \rightarrow \eta(P)=N_P$

$\forall P=(P_1,P_2,P_3)\in M$ alalım.

$\eta(P)=N_P=\left(\frac{x}{3},0,\frac{z}{3}\right)_P=\left(\frac{P_1}{3},0,\frac{P_3}{3}\right)$

$P\in M$ olduğundan $P_1^2+P_3^2=9$ olur.

$\Rightarrow \left(\frac{P_1}{3}\right)^2+\left(\frac{P_3}{3}\right)^2=1$

O halde $\eta(P)$ ler $O(0,0)$ merkezli ve $r=3$ yarıçaplı çember belirtir.

13

10) $\phi(u,v)=(r\cos u, r\sin u, v)$ ile tanımlanan $M=\phi(E^2)$ silindirinin şekil operatörünün matrisi $S=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğuna göre asli eğriliklerini ve asli eğrilik doğrultularını bulunuz.

Çözüm:

M nin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 olmak üzere $S=\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ dir.

O halde asli eğrilikler $k_1=r$, $k_2=0$ dır.

$k_1=r$ asli eğriliğine karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları:

$X=(x_1,x_2)\in\chi(M)$ için $S(X)=rX \Rightarrow \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow rx_2=0$ olup $r>0$ old.dan $x_2=0$ bulunur.

O halde $X=(x_1,0)$ şeklindedir.

$k_2=0$ için $S(X)=0X \Rightarrow \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1=0$ olur.

O halde $k_2=0$ için $X=(0,x_2)$ şeklindedir.

14

11) $\phi(u,v)=(\cos u\,\mathrm{ch}v, \sin u\,\mathrm{ch}v, v)$ ile tanımlanan $M=\phi(E^2)$ yüzeyinin minimal yüzey olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\phi_u=(-\sin u\,\mathrm{ch}v, \cos u\,\mathrm{ch}v, 0)$, $\phi_v=(\cos u\,\mathrm{sh}v, \sin u\,\mathrm{sh}v, 1)$

$\Rightarrow N=\left(\dfrac{\cos u}{\mathrm{ch}v}, \dfrac{\sin u}{\mathrm{ch}v}, -\dfrac{\mathrm{sh}v}{\mathrm{ch}v}\right)$ bulunur.

$$S(\phi_u)=D_{\phi_u}N=\frac{dN}{du}=\left(-\frac{\sin u}{\mathrm{ch}v}, \frac{\cos u}{\mathrm{ch}v}, 0\right)=\frac{1}{\mathrm{ch}^2v}\phi_u+0\phi_v$$

$$S(\phi_v)=\frac{dN}{dv}=\left(-\frac{\cos u\,\mathrm{sh}v}{\mathrm{ch}^2v}, -\frac{\sin u\,\mathrm{sh}v}{\mathrm{ch}^2v}, -\frac{1}{\mathrm{ch}^2v}\right)=0\phi_u-\frac{1}{\mathrm{ch}^2v}\phi_v$$

$\Rightarrow S=\begin{bmatrix} 1/\mathrm{ch}^2v & 0 \\ 0 & -1/\mathrm{ch}^2v \end{bmatrix}$ olup $H(P)=\frac{1}{2}\,\mathrm{iz}\,S(P)=0$

$\Rightarrow M$ yüzeyi minimaldir.

15

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 8