Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 7

Ortalama Eğrilik

M, E^n de bir hiperyüzey ve S de M nin şekil operatörü olsun.

$$H : M \to \mathbb{R}$$

$$P \to H(P) = \frac{1}{n-1}\, iz\, S(P)$$

ile tanımlı H fonksiyonuna ortalama eğrilik fonksiyonu, $H(P) \in \mathbb{R}$ ye de M nin $P \in M$ deki ortalama eğriliği denir.

Örnek

E^3 de birim küre için $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olup birim kürenin her noktasındaki ortalama eğriliği,

$$H(P) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \text{ olur.}$$

Teorem 10. M hiperyüzeyinin ortalama eğriliği baz seçiminden bağımsızdır.

İspat:

$T_M(P)$ nin farklı iki bazı ϕ ve ψ, S nin bu bazlara karşılık gelen matrisleri de S_ϕ ve S_ψ olsun. Q regüler matris olmak üzere bu matrisler arasında $S_\phi = Q S_\psi Q^{-1}$ bağıntısı vardır.

$$\text{iz}\, S_\phi = \text{iz}(Q S_\psi Q^{-1}) = \text{iz}[Q(S_\psi Q^{-1})] = \text{iz}\left[(S_\psi Q^{-1})Q\right] \quad \text{“}\text{iz}(AB) = \text{iz}(BA)\text{”}$$

$$\Rightarrow \text{iz}\, S_\phi = \text{iz}\left[S_\psi (Q^{-1}Q)\right] = \text{iz}\, S_\psi$$

olup S_ϕ den de ve S_ψ den de aynı ortalama eğrilik bulunur.

Teorem 11. M, E^n de bir hiperyüzey ve M nin $P \in M$ deki asli eğrilikleri $k_1(P), k_2(P), \ldots, k_{n-1}(P)$ olsun. Bu durumda,

$$H(P) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} k_i(P) \quad \text{dir.}$$

İspat:

Teorem 8 e benzer olarak ispatı yapılabilir.

Not: E^3 de ortalama eğriliği sıfır olan yüzeylere **minimal yüzeyler** denir.

Eğrilik Çizgisi

M, E^n de bir hiperyüzey ve S de M nin şekil operatörü olsun. M üzerinde bir eğri α ve α nın teğet vektör alanı T olmak üzere T vektör alanı bir asli eğrilik doğrultusu ise yani $S(T)=\lambda T$ oluyorsa α eğrisine M üzerinde bir **eğrilik çizgisi** denir.

Örnek

E^3 de S^2 birim küresi r yarıçaplı küre olsun. S^2 üzerinde yatan her eğri bir eğrilik çizgisidir: S^2 nin S şekil operatörü için $S(X)=\frac{1}{r}X$ dir. S^2 üzerindeki bir α eğrisinin T teğet vektör alanı için de $S(T)=\frac{1}{r}T$ olur. O halde α bir eğrilik çizgisidir.

Not: M, E^3 de bir yüzey ve α da M üzerinde bir P düzlemi ile M nin arakesit eğrisi olsun. Eğer M ile P arasındaki açı sabit ise α eğrisi bir eğrilik çizgisidir.

Teorem 12. M, E^n de bir hiperyüzey olsun. $P \in M$ noktasından geçen ve farklı asli eğriliklere karşılık gelen eğrilik çizgileri bir ortogonal eğri demeti meydana getirir.

İspat:

$P \in M$ noktasındaki farklı iki eğrilik çizgisi α ve $\bar{\alpha}$, teğet vektör alanları da T ve $\bar{T}$ olsun. α ve $\bar{\alpha}$ eğrilik çizgisi olduğundan T ve $\bar{T}$ asli eğrilik doğrultusudur. Hipotezden $S(T) = k_1 T$ ve $S(\bar{T}) = k_2 \bar{T}$ olmak üzere $k_1 \neq k_2$ dir. Farklı asli eğriliklere karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları ortogonal olacağından $T \perp \bar{T}$ dir.

$$\Rightarrow \alpha \perp \bar{\alpha} \text{ olur.}$$

Umbilik Nokta – Flat Nokta

M, E^n de bir hiperyüzey ve $P \in M$ deki şekil operatörü S_p olsun.

1) $S_p = \lambda I_{T_pM}$ ise $P \in M$ noktasına bir umbilik nokta denir.

2) $S_p = 0$ ise $P \in M$ noktasına bir flat (düzlemsel) nokta denir.

Örnek

r yarıçaplı S^2 küresi için $S=\frac{1}{r}I_2$ olduğundan küre üzerindeki tüm noktalar umbiliktir.

Eşlenik Tanjant Vektörler ve Asimptotik Doğrultu

M, E^n de bir hiperyüzey ve M nin şekil operatörü S olsun. $X_p, Y_p \in T_M(P)$ için $\langle S(X_p), Y_p \rangle = 0$ ise X_p ve Y_p ye eşlenik tanjant vektörler denir. $X_p \neq 0$ için $\langle S(X_p), X_p \rangle = 0$ ise X_p ye asimptotik doğrultu denir.

Asimptotik Çizgi

α, M hiperyüzeyi üzerinde bir eğri ve T de α nın teğet vektör alanı olsun. Eğer T bir asimptotik doğrultu ise yani $\langle S(T), T \rangle = 0$ oluyorsa α ya bir asimptotik çizgi denir.

Teorem 13. M, E^n de bir hiperyüzey olsun. $S(X)=kX$ ve $S(Y)=-kY$ olacak şekilde iki lineer bağımsız ve asimptotik olmayan vektör alanı X ve Y ise $X+Y$ ile $X-Y$ vektör alanları asimptotik olduklarında ortogonaldir.

Tersine, $X+Y$ ile $X-Y$ ortogonal ise birer asimptotik doğrultudurlar.

İspat:

($\Rightarrow$) $X+Y$ asimptotik ise $\langle S(X+Y), X+Y\rangle = 0$ dır. S lineer olduğundan $\langle S(X)+S(Y), X+Y\rangle = 0$ buradan da $\langle kX-kY, X+Y\rangle = 0$ olup $k\langle X-Y, X+Y\rangle = 0$ bulunur. X asimptotik olmadığından $\langle S(X), X\rangle \neq 0 \Rightarrow k\langle X, X\rangle \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$ dır. O halde $k\langle X-Y, X-Y\rangle = 0$ eşitliğinden $\langle X-Y, X+Y\rangle = 0$ bulunur. X ve Y lineer bağımsız olduğundan $X-Y \neq 0$ ve $X+Y \neq 0$ dır. $\langle X-Y, X+Y\rangle = 0$ olduğundan $X-Y$ ile $X+Y$ ortogonaldir.

Benzer şekilde, $X-Y$ asimptotik ise $\langle s(X-Y), X-Y\rangle = 0$ dır.

$\Rightarrow \langle s(X)-s(Y), X-Y\rangle = 0 \Rightarrow \langle kX+kY, X-Y\rangle = 0 \Rightarrow k\langle X+Y, X-Y\rangle = 0$

olup aynı düşünce ile $\langle X+Y, X-Y\rangle = 0$ bulunur.

$\Rightarrow X+Y$ ile $X-Y$ ortogonaldir.

$(\Leftarrow)$ $X+Y$ ile $X-Y$ ortogonal olsun. Yani $\langle X+Y, X-Y\rangle = 0$ olsun.

$X-Y = \frac{1}{k} s(X+Y)$ yazılabileceğinden $\frac{1}{k}\langle X+Y, s(X+Y)\rangle = 0$ olur.

$k \neq 0$ için $\frac{1}{k} \neq 0$ olacağından $\langle s(X+Y), X+Y\rangle = 0$ olup $X+Y$ asimptotik doğrultudur. Benzer olarak,

$\langle X+Y, X-Y\rangle = 0$ ve $X+Y = \frac{1}{k} s(X-Y)$ kullanılırsa

$\langle s(X-Y), X-Y\rangle = 0$ bulunur.

$\Rightarrow X-Y$ asimptotik doğrultudur.

Teorem 14. M, E^nde bir hiperyüzey olsun.

1) $X_p \in T_M(p)$, hem asimptotik doğrultu ve hem de bir asli eğrilik doğrultusu ise X_p tanjant vektörü $T_M(p)$ deki her vektöre eşleniktir.

2) $X_p \in T_M(p)$ tanjant vektörü $T_M(p)$ deki her vektöre eşlenik ise X_p bir asimptotik doğrultudur.

3) $S(X_p) \neq 0$ ise X_p ye asimptotik olan doğrultular daima vardır.

4) II. temel form pozitif (negatif) tanımlı ise hiçbir asimptotik doğrultu yoktur.

İspat:

1) X_p hem asimptotik doğrultu hem de asli eğrilik doğrultusu olsun. O halde, $\langle S(X_p), X_p \rangle = 0$ ve $S(X_p) = k X_p$, $k \in \mathbb{R}$ dir.

$$\Rightarrow \langle k X_p, X_p \rangle = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ veya } \langle X_p, X_p \rangle = 0$$

$$\Rightarrow k = 0 \text{ veya } X_p = 0 \text{ dır.}$$

$k=0$ olsun.

$$\forall Y_p \in T_M(p) \text{ için } \langle S(X_p), Y_p \rangle = \langle kX_p, Y_p \rangle = \langle 0, Y_p \rangle = 0$$

bulunur. O halde X_p, $T_M(p)$ deki her vektöre eşleniktir.

$X_p = 0$ olsun.

$$\forall Y_p \in T_M(p) \text{ için } \langle S(X_p), Y_p \rangle = \langle S(0), Y_p \rangle = \langle 0, Y_p \rangle = 0$$

bulunur. O halde X_p, $T_M(p)$ deki her vektöre eşleniktir.

2) X_p, $T_M(p)$ deki her vektöre eşlenik olsun. Yani $\forall Y_p \in T_M(p)$ için $\langle S(X_p), Y_p \rangle = 0$ olsun. $\forall Y_p \in T_M(p)$ için doğru olan bu eşitlik Y_p yerine $X_p \in T_M(p)$ alındığında da doğru olur.

$$\Rightarrow \langle S(X_p), X_p \rangle = 0$$

$\Rightarrow X_p$ asimptotik doğrultudur.

3) $S(X_p) \neq 0$ olsun. $\langle S(X_p), Y_p \rangle = 0$ olacak şekilde daima $Y_p \in T_M(p)$ vardır. Yani X_p ye eşlenik bir Y_p tanjant vektörü bulunabilir.

4) $\widehat{II}$. temel form pozitif tanımlı olsun. Yani $X \neq 0$ için $\widehat{II}(X,X) > 0$ olsun. $\widehat{II}(X,X) = \langle S(X),X\rangle > 0$ olup $\langle S(X),X\rangle \neq 0$ dır. Yani hiç bir doğrultu asimptotik değildir. $\widehat{II}$. temel formun negatif tanımlı olması durumunda da benzer biçimde yapılabilir.

Teorem 15. M, E^3 de bir yüzey olsun. M üzerinde temel formlar $I, \widehat{II}, \widehat{III}$ ve M nin Gauss eğriliği K, ortalama eğriliği da H olmak üzere $\widehat{III} - 2H\widehat{II} + KI = 0$ dır.

İspat:

$\text{boy}M = 2$ olduğundan $\text{boy}\,T_M(P) = 2$ dir. O halde $S_P : T_M(P) \to T_M(P)$ şekil operatörünün karakteristik polinomu 2. derecedendir. k_1 ve k_2 M nin asli eğrilikleri olmak üzere S nin matrisi $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ dir.
O halde karakteristik polinom,

$$P_S(\lambda) = \det(\lambda I_2 - S) = \begin{vmatrix} \lambda - k_1 & 0 \\ 0 & \lambda - k_2 \end{vmatrix} = (\lambda - k_1)(\lambda - k_2)$$

$\Rightarrow P_S(\lambda) = \lambda^2 - (k_1+k_2)\lambda + k_1k_2$ olur. Cayley-Hamilton Teoremine göre her matris kendi karakteristik polinomunun bir kökü olacağından

$$P_S(S) = S^2 - (k_1+k_2)S + k_1k_2 I_2 = 0$$ dır.

Buradan $\forall X_p \in T_M(p)$ için

$$S^2(X_p) - (k_1+k_2)S(X_p) + k_1k_2X_p = 0$$ bulunur.

$\forall Y_p \in T_M(p)$ için

$$\langle S^2(X_p) - (k_1+k_2)S(X_p) + k_1k_2X_p , Y_p \rangle = \langle 0, Y_p \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle S^2(X_p), Y_p \rangle - (k_1+k_2)\langle S(X_p), Y_p \rangle + k_1k_2 \langle X_p, Y_p \rangle = 0$$

$$\Rightarrow III(X_p, Y_p) - 2H(p)\, II(X_p, Y_p) + K(p)\, I(X_p, Y_p) = 0 = O(X_p, Y_p)$$

$$\Rightarrow III - 2H\, II + K\, I = 0$$

bulunur.

Bir Yüzeyin Normal Eğriliği

M, E^3 de bir yüzey ve S de M nin şekil operatörü olsun. M yüzeyinin bir $\vec{v}_p \in T_M(p)$ tangant vektörü doğrultusundaki normal eğriliği,

$$k_n(\vec{v}_p) = \frac{\langle S(\vec{v}_p), \vec{v}_p \rangle}{\|\vec{v}_p\|^2}$$

ile tanımlanır. Bu tanıma göre $k_n(\vec{v}_p) = \dfrac{II(\vec{v}_p, \vec{v}_p)}{I(\vec{v}_p, \vec{v}_p)}$ olduğu açıktır.

Yüzey Üzerinde Bir Eğrinin Normal Eğriliği

M, E^3 de bir yüzey, $\alpha : I \to M$ eğrisi M üzerinde bir eğri ve α nın birim teğet vektör alanı da T olsun. α eğrisi boyunca yüzeyin normal eğriliği

$$k_n = \frac{\langle S(T), T \rangle}{\|T\|^2} = \langle S(T), T \rangle \text{ ile tanımlıdır.}$$

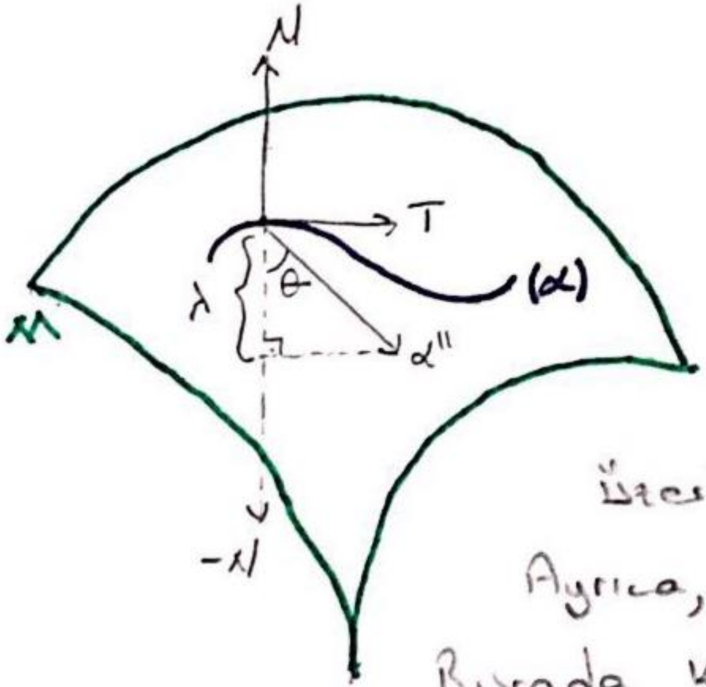
Geometrik Anlam:

$$k_N = \langle S(T), T \rangle = \langle D_T N, T \rangle \text{ dir.}$$

$$\langle N, T \rangle = 0 \Rightarrow T[\langle N, T \rangle] = T[0] = 0 \Rightarrow \langle D_T N, T \rangle + \langle N, D_T T \rangle = 0$$

O halde $k_N = \langle D_T N, T \rangle = -\langle D_T T, N \rangle = -\langle T', N \rangle = \langle \alpha'', -N \rangle$

olur.



$$k_N = \langle \alpha'', -N \rangle = \|\alpha''\| . \cos\theta$$

$$\Rightarrow k_N = \|\alpha''\| . \frac{\lambda}{\|\alpha''\|} = \lambda \text{ bulunur.}$$

O halde α eğrisi boyunca normal eğrilik, α'' ivme vektörünün birim normal vektör üzerine izdüşümünün uzunluğuna eşittir.

Ayrıca, $k_N = \|\alpha''\| \cos\theta$ dan $k_N = \kappa \cos\theta$ bulunur.

Burada κ, α eğrisinin eğriliğidir.

Normal Kesit Eğrisi

M, E^3 de bir yüzey, M nin $p \in M$ deki normal vektörü N_p ve $X_p \in T_M(p)$ olsun. X_p ile N_p nin belirlediği düzlem ile M nin arakesiti olan eğriye yüzeyin X_p doğrultusundaki **normal kesit eğrisi** denir. Bu eğrinin eğriliğine de yüzeyin **kesit eğriliği** denir.

M yüzeyinin normal kesit eğrisi α olsun. O halde yüzeyin normali normal kesit eğrisinin asli normali olur. Yani $N = \dfrac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$ dır.

α eğrisi boyunca normal eğrilik $k_N = \langle \alpha'', -N \rangle$ idi.

$$\Rightarrow k_N = \left\langle \alpha'', -\frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \right\rangle = -\|\alpha''\| = -\kappa \text{ olur.}$$

O halde yüzeyin kesit eğrisinin eğriliği yani kesit eğriliği eğri boyunca normal eğriliğe eşittir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 7