ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 6

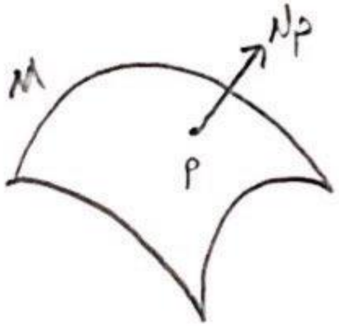
GAUSS DÖNÜŞÜMÜ

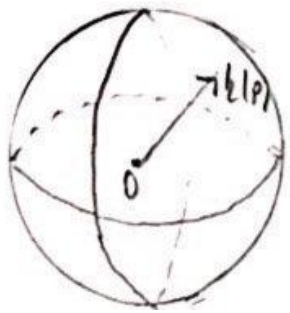
M, $\mathbb{R}^n$ de yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. S^{n-1} birim hiperküre olmak üzere

$$\nu : M \longrightarrow S^{n-1}$$
$$p \to \nu(p) = N_p = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

dif.bilir dönüşümüne Gauss Dönüşümü denir.

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2\}$$ dir.





$\eta(M)$ kümesine M yüzeyinin küresel resmi adı verilir.

Örnek

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$ silindiri için $\eta(M)$ kümesini bulunuz.

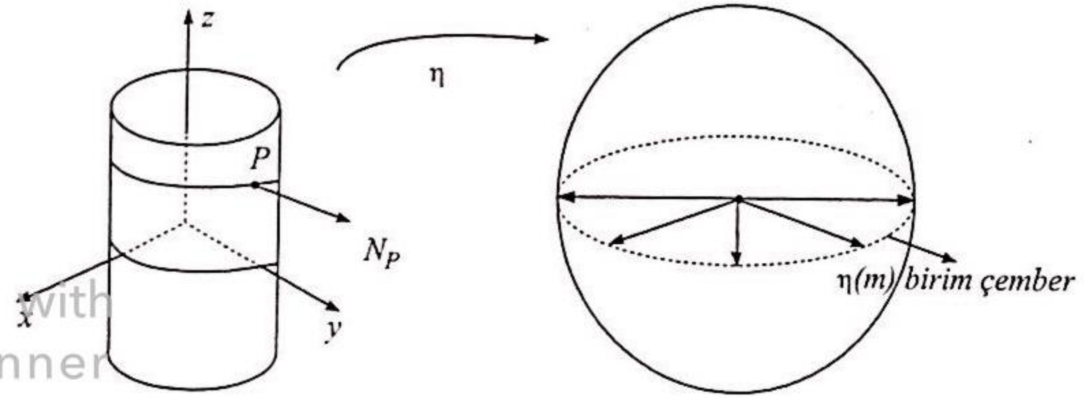
Çözüm:

M nin fonksiyonu $f(x,y,z)=x^2+y^2-1=0$ olmak üzere $\vec{\nabla} f = (2x, 2y, 0)$

$\Rightarrow N = \dfrac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = (x,y,0)$ olur.

$P=(p_1,p_2,p_3) \in M$ için $\eta(p) = N_p = (p_1,p_2,0)$ bulunur.

$p_1^2+p_2^2=1$ olacağından P noktalarının resmi kürenin büyük çemberini oluşturur.



Örnek

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\}$ düzlemi için $h(M)$ kümesini bulunuz.

Çözüm:

$N = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$ şeklinde sabit olup

$\forall p \in M$ için $h(p) = N_p = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$ bulunur. Yani $h(M)$ tek bir

noktadan oluşur.

Örnek

r yarıçaplı kürenin Gauss dönüşümü altındaki resmi

O merkezli birim kürenin tamamıdır.

Teorem 4. M, E^n de bir hiperyüzey, $\eta: M \to S^{n-1}$ Gauss dönüşümü ve S de M nin şekil operatörü olsun. $\eta_* = S$ dir. Yani Gauss dönüşümünün türev dönüşümü şekil operatörüne eşittir.

İspat:

$\eta: M \to S^{n-1}$, $\eta(p) = N|_p = (a_1, a_2, \ldots, a_n)|_p$ olmak üzere

$$\eta_*|_p : T_M(p) \to T_{S^{n-1}}(\eta(p))$$

$$\vec{V}_p \to \eta_*|_p(\vec{V}_p) = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_p[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\eta(p)}$$

$$= (\vec{V}_p[a_1], \ldots, \vec{V}_p[a_n])$$

$$= S_p(\vec{V}_p)$$

$\forall \vec{V}_p \in T_M(p)$ ve $\forall p \in M$ için

$\eta_* = S$ olur.

Temel Formlar

Tanım: M, E^n de bir hiperyüzey ve S de M nin şekil operatörü olsun.

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$
$$(X, Y) \to I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

ile tanımlanan I^q fonksiyonuna M nin q. temel formu denir.

* $q = 1$ için 1. temel form $I(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ olup iç çarpım fonksiyonudur.

* $q = 2$ için 2. temel form $II(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle$ dir.

* $q = 3$ için 3. temel form $III(X, Y) = \langle S^2(X), Y \rangle = \langle S(X), S(Y) \rangle$ dir.

Örnek:

$M = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \}$ yüzeyinin temel formlarını hesaplayınız.

Çözüm:

Yüzeyi tanımlamada kullanılan f fonksiyonu $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 1 = 0$ olsun. $\vec{\nabla} f = (3,4,5)$ olup $\|\vec{\nabla} f\| = 5\sqrt{2}$ dir. O halde yüzeyin birim normal vektör alanı $N = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}\right)$ olur.

$$S(X) = D_X N = \left(X\left[\frac{3}{5\sqrt{2}}\right], X\left[\frac{4}{5\sqrt{2}}\right], X\left[\frac{5}{5\sqrt{2}}\right] \right) = (0,0,0)$$

$\Rightarrow S(X) = 0 \Rightarrow S = 0$ olur.

1. temel form $I(X,Y) = \langle X, Y \rangle$
2. temel form $II(X,Y) = \langle S(X), Y \rangle = \langle 0, Y \rangle = 0$
3. temel form $III(X,Y) = \langle S^2(X), Y \rangle = \langle S(S(X)), Y \rangle = 0$

bulunur.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ de küre yüzeyinin temel formlarını hesaplayınız.

Çözüm:

O merkezli ve r yarıçaplı küre yüzeyi $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$ denklemi ile verilir. S^2 nin şekil operatörünün $S(X) = \frac{1}{r} X$ olduğunu biliyoruz.

$$\Rightarrow S(X) = \frac{1}{r} I(X)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{r} I \text{ dir.}$$

1. temel form $\quad I(X,Y) = \langle X, Y \rangle$

2. temel form $\quad II(X,Y) = \langle S(X), Y \rangle = \langle \frac{1}{r} I(X), Y \rangle = \frac{1}{r} \langle X, Y \rangle$

3. temel form $\quad III(X,Y) = \langle S^2(X), Y \rangle = \langle S(X), S(Y) \rangle = \frac{1}{r^2} \langle X, Y \rangle$

ile tanımlıdır.

ŞEKİL OPERATÖRÜNÜN CEBİRSEL DEĞİŞMEZLERİ

Hatırlatma: V bir vektör uzayı ve $A: V \to V$ lineer dönüşüm olsun. $X \in V$ ve $X \neq 0$ için $A(X) = \lambda X$ olacak biçimde $\lambda \in \mathbb{R}$ varsa λ ya A lineer dönüşümünün **karakteristik değeri** ve X e de λ karakteristik değerine karşılık gelen **karakteristik vektör** denir.

$A(X) = \lambda X \Rightarrow A(X) = \lambda I(X) \Rightarrow (A - \lambda I)(X) = 0$ bulunur. Bu sistemin $X \neq 0$ çözümünün bulunabilmesi için katsayılar matrisi $A - \lambda I$ için $\det(A - \lambda I_n) = 0$ olmalıdır. (boyV $= n$)

$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ polinomuna A lineer dönüşümünün veya ona karşılık gelen matrisin **karakteristik polinomu** denir.

A nın karakteristik değerleri için $\det(A - \lambda I_n) = 0$ olacağından $P_A(\lambda) = 0$ olur. Yani karakteristik değerler, karakteristik polinomun kökleridir.

Örnek:

$A=\begin{bmatrix}1&6\\0&2\end{bmatrix}$ matrisine karşılık gelen lineer dönüşümün karakteristik değerlerini ve bunlara karşılık gelen karakteristik vektörleri bulunuz.

Çözüm:

$0\neq X=(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ için $A(x)=\lambda X$ den $\begin{bmatrix}1&6\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1+6x_2=\lambda x_1 \\ 2x_2=\lambda x_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (1-\lambda)x_1+6x_2=0 \\ 0x_1+(2-\lambda)x_2=0 \end{array}$$

Bu sistemin $(x_1,x_2)\neq 0$ çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı $\begin{vmatrix}1-\lambda & 6\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$ olmalıdır.

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=2$$ karakteristik değerleri bulunur.

$\lambda_1 = 1$ için karakteristik vektörler :

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 6x_2 = 0 \\ 0x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$ sisteminde $\lambda = 1$ alınırsa $x_2 = 0$ bulunur.

O halde $\lambda_1 = 1$ kar. değerine karşılık gelen kar. vektörler $X = (k, 0), k \neq 0$ şeklindedir.

$\lambda_2 = 2$ için karakteristik vektörler : Yukarıda $\lambda = 2$ yazılırsa

$-x_1 + 6x_2 = 0$ bulunur. $x_2 = k$ için $x_1 = 6k$ olur.

O halde $\lambda_2 = 2$ kar. değerine karşılık gelen kar. vektörler $X = (6k, k), k \neq 0$ şeklindedir.

2. Yol:

Karakteristik değerleri, karakteristik polinomun köklerinden de bulabiliriz: A nın karakteristik polinomu,

$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -6 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$ olup $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -6 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$ dan $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ olur.

Asli Eğrilikler ve Asli Eğrilik Doğrultuları

Tanım: M, E^n de bir hiperyüzey ve S de M nin şekil operatörü olsun. $S:\chi(M)\rightarrow\chi(M)$ lineer olduğundan karakteristik değerlerinden bahsedilebilir. $P\in M$ noktasında S nin karakteristik (veya öz) değerlerine M nin bu noktadaki asli eğrilikleri, bu karakteristik değerlere karşılık gelen karakteristik vektörlere de M nin P noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir.

O halde, $X_p\neq 0$ olmak üzere $S_p(X_p)=k X_p$ olacak şekilde $k_1\in\mathbb{R}$ varsa k_1 e asli eğrilik, $X_p\in T_M(P)$ ye de bu asli eğriliğe karşılık gelen asli eğrilik doğrultusu denir.

Teorem 5 M, E^n de bir hiperyüzey ve S de M nin şekil operatörü olsun. S nin asli eğrilikleri $T_M(P)$ deki baz seçiminden bağımsızdır.

İspat:

$T_M(P)$ nin farklı iki bazı ϕ ve Ψ, S nin bu bazlara karşılık gelen matrisleri de S_ϕ ve S_Ψ olsun. Q regüler bir matris olmak üzere bu matrisler arasında $S_\phi = Q S_\Psi Q^{-1}$ bağıntısı vardır.

S nin asli eğrilikleri (kar. değerleri) karakteristik polinomun kökleridir. $P_{S_\phi}(\lambda) = \det(\lambda I_{n-1} - S_\phi) = 0$ dır.

$$P_{S_\phi}(\lambda) = \det(\lambda I_{n-1} - S_\phi) = \det(\lambda I_{n-1} - Q S_\Psi Q^{-1}) = \det(\lambda Q Q^{-1} - Q S_\Psi Q^{-1})$$

$$\Rightarrow P_{S_\phi}(\lambda) = \det\left[Q(\lambda I_{n-1} - S_\Psi) Q^{-1}\right]$$

$$= \det Q \,.\, \det(\lambda I_{n-1} - S_\Psi) \,.\, \det Q^{-1}$$

$\det Q^{-1} = \dfrac{1}{\det Q}$ old.dan $P_{S_\phi}(\lambda) = \det(\lambda I_{n-1} - S_\Psi) = P_{S_\Psi}(\lambda)$ bulunur.

Buradan $P_{S_\beta}(\lambda) = P_{S_\alpha}(\lambda) = 0$ bulunur. O halde S nin hangi baza göre matrisi alınırsa alınsın aynı asli eğrilikler elde edilir. Yani asli eğrilikler baz seçiminden bağımsızdır.

Teorem 6. M, E^n de bir hiperyüzey ve S de M nin şekil operatörü olsun. M üzerinde farklı asli eğriliklere karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları ortogonaldir.

İspat:

k_1 ve k_2, $k_1 \neq k_2$ olacak biçimde farklı asli eğrilikler ve X_p ile Y_p de bunlara karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları olsun. O halde $S(X_p) = k_1 X_p$, $S(Y_p) = k_2 Y_p$ dir. S simetrik olduğundan,

$$\langle S(X_p), Y_p \rangle = \langle X_p, S(Y_p) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle k_1 X_p, Y_p \rangle = \langle X_p, k_2 Y_p \rangle \Rightarrow \underbrace{(k_1 - k_2)}_{\neq 0} \langle X_p, Y_p \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle X_p, Y_p \rangle = 0 \Rightarrow X_p \perp Y_p .$$

Gauss Eğriliği

M, E^n de bir hiperyüzey ve S de M nin şekil operatörü olsun.

$$K : M \to \mathbb{R}$$
$$P \to K(P) = \det S_P$$

fonksiyonuna Gauss eğrilik fonksiyonu, $K(P) \in \mathbb{R}$ sayısına da M nin $P \in M$ deki Gauss eğriliği denir.

Gauss eğriliği her noktada sıfır olan E^3 deki yüzeylere flat(düz) yüzeyler denir. Örneğin $ax+by+cz=d$ denklemi ile verilen düzlem için $S=0$ olduğundan şekil operatörünün matrisi $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olup her noktada $K(P)=0$ dır. Yani düzlem flat yüzeydir.

Örnek

Birim S^2 küresi için $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğundan $K(P) = 1$ dir.

Teorem 7. M hiperyüzeyinin Gauss eğriliği baz seçiminden bağımsızdır.

İspat:

$T_M(P)$ nin farklı iki bazı ϕ ve ψ, S nin bu bazlara karşılık gelen matrisleri de S_ϕ ve S_ψ olsun. Q regüler bir matris olmak üzere bu matrisler arasında,

$$S_\phi = Q S_\psi Q^{-1}$$

bağıntısı vardır.

$$\begin{aligned} \det S_\phi &= \det(Q S_\psi Q^{-1}) \\ &= \det Q \det S_\psi \det Q^{-1} \\ &= \det Q \det S_\psi \frac{1}{\det Q} \\ &= \det S_\psi \end{aligned}$$

olup Gauss eğriliği baz seçiminden bağımsızdır.

Teorem 8. M, E^n de bir hiperyüzey ve M nin $P\in M$ deki asli eğrilikleri $k_1(p), k_2(p), \ldots, k_{n-1}(p)$ olsun. Bu durumda,

$$K(p)=\prod_{i=1}^{n-1} k_i(p)=k_1(p).k_2(p).\ \ldots\ .k_{n-1}(p) \quad \text{dir.}$$

İspat:

$k_1(p), \ldots, k_{n-1}(p)$ asli eğriliklerine karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları $X_1, \ldots, X_{n-1}$ olsun. Şekil operatörü simetrik olduğundan asli eğrilik doğrultularından oluşan $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}\}$ ortonormal sistemi vardır. $\text{boy}M=\text{boy}\,T_M(P)=n-1$ olduğundan $\phi=\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}\}$ sistemi $T_M(P)$ nin ortonormal bazıdır.

$$S(X_1)=k_1X_1=k_1X_1+0X_2+\ldots+0X_{n-1}$$

$$S(X_2)=k_2X_2=0+k_2X_2+\ldots+0X_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$S(X_{n-1})=k_{n-1}X_{n-1}=0+0+\ldots+k_{n-1}X_{n-1} \quad \text{yazılabilir.}$$

O halde S nin Φ bazına göre matrisi

$$S_\Phi = \begin{bmatrix} k_1(p) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2(p) & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1}(p) \end{bmatrix}$$

olup $K(p) = \det S_\Phi = \prod_{i=1}^{n-1} k_i(p)$ olur.

Teorem 9. M, E^n de bir hiperyüzey, $\Phi = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}\}$ $T_M(p)$ nin bir bazı ve $N = \frac{Z}{\|Z\|}$ da M nin birim normal vektör alanı olmak üzere,

$$K(p) = \frac{1}{\|Z(p)\|^{n-1}} \frac{\det(D_{Y_1}Z, D_{Y_2}Z, \dots, D_{Y_{n-1}}Z, Z(p))}{\det(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}, Z(p))}$$ dir.

Örnek

$M = S^2 = \{(x,y,z) \in E^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ yüzeyinin Gauss eğriliğini hesaplayınız.

Çözüm:

M nin normal vektörü $Z = \vec{\nabla} f = (2x, 2y, 2z)$ dir.

$Y_1 = (-y, x, 0)$, $Y_2 = (0, z, -y)$ olmak üzere $Y_1 \perp Z$ ve $Y_2 \perp Z$ olup $\{Y_1, Y_2\}$ $\chi(M)$ için baz olarak alınabilir.

$$K(P) = \frac{1}{\|Z\|^2} \frac{\det(D_{Y_1}Z, D_{Y_2}Z, Z)}{\det(Y_1, Y_2, Z)} \quad \text{dir.}$$

$D_{Y_1}Z = (Y_1[2x], Y_1[2y], Y_1[2z]) = (-2y, 2x, 0)$

$D_{Y_2}Z = (Y_2[2x], Y_2[2y], Y_2[2z]) = (0, 2z, -2y)$

$\det(D_{Y_1}Z, D_{Y_2}Z, Z) = -2y(4z^2+4y^2) - 2x(4xy)$

$\det(Y_1, Y_2, Z) = -y(2z^2+2y^2) - x(2xy)$ ve $\|Z\|^2 = 4$ olup

$K = 1$ bulunur.

Örnek

$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{9}x_3^2 = 1\}$ elipsoid yüzeyinin Gauss eğriliğini bulunuz.

Not: $K(P) > 0$ ise yüzey teğet düzlemin hep aynı tarafındadır (küre yüzeyi gibi)

$K(P) < 0$ ise yüzeyin teğet düzlemin her iki tarafında da noktaları vardır.

(semer yüzeyi gibi)

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 6