ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi
# Fen Edebiyat Fakültesi
# Matematik Bölümü
# Dijital Ders Platformu

## Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 5

# Hiperyüzeyler Üzerinde Şekil Operatörü (Weingarten Dönüşümü)

$M$, $E^n$ de bir hiperyüzey, $N$ $M$ nin birim normal vektör alanı ve $D$ de $E^n$ deki türev konneksiyonu olsun. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

ile tanımlı $S$ dönüşümüne $M$ üzerinde şekil operatörü denir.

Hatırlatma: $D_X Y = \left( X[y_1], X[y_2], \dots, X[y_n] \right)$ şeklinde tanımlı idi. Burada $X, Y \in \chi(E^n)$ ve $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ dif. bilir vektör alanıdır.

**Teorem 2:** $M$, $E^n$ de bir hiperyüzey ve $S$ de $M$ üzerinde şekil operatörü olsun.

1) $S : \chi(M) \to \chi(M)$ dir.

2) $S$ lineerdir.

**İspat:**

1) $N$, $M$ nin birim normal vektör alanı olmak üzere $\langle N, N \rangle = 1$ dir.

$$\Rightarrow X[\langle N, N \rangle] = X[1] = 0$$

$$\Rightarrow \langle D_X N, N \rangle + \langle N, D_X N \rangle = 0$$

$$\Rightarrow 2 \langle \underbrace{D_X N}_{S(X)}, N \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle S(X), N \rangle = 0$$

$N \in \chi^{\perp}(M)$ ve $\langle S(X), N \rangle = 0$ olduğundan $S(X) \in \chi(M)$ olur.

O halde $S : \chi(M) \to \chi(M)$ dir.

2) $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $S(aX+bY) \stackrel{?}{=} aS(X)+bS(Y)$

$$S(aX+bY) = D_{aX+bY}N$$

$$= aD_X N + bD_Y N$$

$$= aS(X) + bS(Y)$$

$\Rightarrow S$ lineerdir.

**Teorem 3:** $M$, $E^n$ de bir hiperyüzey ve $S$ de $M$ üzerinde şekil operatörü olsun. $S$ bir simetrik dönüşümdür.

**İspat:**

$S$ nin simetrik olduğunu göstermek için $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\langle S(X), Y \rangle = \langle X, S(Y) \rangle$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için $\langle X, N\rangle = 0$ olup $Y[\langle X, N\rangle] = 0$ dır.

$$\Rightarrow \langle D_Y X, N\rangle + \langle X, D_Y N\rangle = 0 \; \ldots (*)$$

bulunur.

Benzer şekilde $\langle Y, N\rangle = 0$ olup $X[\langle Y, N\rangle] = 0$ dır.

$$\Rightarrow \langle D_X Y, N\rangle + \langle Y, D_X N\rangle = 0 \; \ldots (**)$$

bulunur.

$$(**) - (*) \qquad \underbrace{\langle \underbrace{D_X Y - D_Y X}_{\substack{[X,Y] \\ \in \chi(M)}}, N\rangle}_{0} + \langle Y, D_X N\rangle - \langle X, D_Y N\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle D_X N, Y\rangle = \langle X, D_Y N\rangle$$

$$\Rightarrow \langle S(X), Y\rangle = \langle X, S(Y)\rangle \text{ olur.}$$

Uyarı: D operatörünün sağladığı özellikler Dif. Geo. I dersinde ifade edilmiştir.

Sonuç: $S: \chi(M) \to \chi(M)$ şekil operatörü lineer ve simetrik olduğundan S ye karşılık gelen matris simetrik matristir. Yani S ye karşılık gelen matris $\mathcal{S}$ ise $\mathcal{S}^t = \mathcal{S}$ dir.

## ŞEKİL OPERATÖRÜNÜN MATRİSİNİN HESABI

$\mathbb{R}^3$ de bir M yüzeyi üzerinde şekil operatörü S olsun.

$S: \chi(M) \to \chi(M)$ lineer dönüşüm olduğundan S ye karşılık gelen matristen bahsedilebilir. $\chi(M)$ nin bir $\phi = \{X, Y\}$ bazı için

$$S(X) = aX + bY$$

$$S(Y) = cX + dY$$

olmak üzere S nin bu baza göre matrisi $S_\phi = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ dir.

S dönüşümü simetrik olduğundan $S_\phi$ matrisi de simetriktir. Yani, $S_\phi^t = S_\phi$ dir

Not: S nin matris hesabındaki batın ortonormal baz seçilmesi işlemleri kolaylaştıracaktır.

Örnek: $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u,v) \longrightarrow \phi(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, au) \quad a \in \mathbb{R}$$

parametrik denklemi ile verilen yüzeyin şekil operatörünün matrisini bulalım:

$$\phi_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, a), \quad \phi_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$\phi_u \times \phi_v = (-a \cos u \cos v, -a \cos u \sin v, -\sin u \cos u)$$

$$\Rightarrow \|\phi_u \times \phi_v\| = \cos u \sqrt{a^2 + \sin^2 u}$$

O halde yüzeyin birim normal vektörü,

$$N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \sin^2 u}} (-a \cos v, -a \sin v, -\sin u)$$

olarak bulunur.

$\Phi_u \perp \Phi_v$ olduğundan $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ sistemi lineer bağımsızdır. boy $\chi(M)=2$ olduğundan $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ $\chi(M)$ için baz olarak alınabilir.

$X = \dfrac{\Phi_u}{\|\Phi_u\|}$ ve $Y = \dfrac{\Phi_v}{\|\Phi_v\|}$ alınırsa $\{X, Y\}$ $\chi(M)$ için ortonormal baz

olur. $\|\Phi_u\| = \sqrt{a^2+\sin^2 u}$, $\|\Phi_v\| = \cos u$ olup

$$X = \frac{1}{\sqrt{a^2+\sin^2 u}}\left(-\sin u\cos v, -\sin u \sin v, a\right)$$

ve $\quad Y = (-\sin v, \cos v, 0)$ bulunur.

$S(X) = aX + bY$ ve $S(Y) = cX + dY$ şeklinde yazmaya çalışacağız.

$$S(X) = D_X N = D_{\frac{\Phi_u}{\|\Phi_u\|}} N = \frac{1}{\|\Phi_u\|} D_{\Phi_u} N = \frac{1}{\|\Phi_u\|}\frac{dN}{du}$$

$$\frac{dN}{du} = -\frac{\sin u \cos u}{(a^2+\sin^2 u)^{3/2}}\left(-a\cos v, -a\sin v, -\sin u\right) + \frac{1}{(a^2+\sin^2 u)^{1/2}}\left(0, 0, -\cos u\right)$$

olup $S(X) = \frac{1}{\|\phi_u\|}\frac{dN}{du}$

$$= \frac{-a\cos u}{(a^2+\sin^2 u)^2}\left(-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, a\right)$$

$$= \frac{-a\cos u}{(a^2+\sin^2 u)^{3/2}}\left[\frac{1}{(a^2+\sin^2 u)^{1/2}}\left(-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, a\right)\right]$$

$$= -\frac{a\cos u}{(a^2+\sin^2 u)^{3/2}}X + 0Y$$ olur.

$$S(Y) = D_Y N = D_{\frac{\phi_v}{\|\phi_v\|}} N = \frac{1}{\|\phi_v\|} D_{\phi_v} N = \frac{1}{\|\phi_v\|} \frac{dN}{dv}$$

$$\frac{dN}{dv} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\sin^2 v}} \left( a \sin v, -a\cos v, 0 \right)$$

olup $S(Y) = 0X - \dfrac{a}{\cos v\sqrt{a^2+\sin^2 v}} Y$ bulunur.

$$S(X) = \frac{-a\cos v}{(a^2+\sin^2 v)^{3/2}} X + 0Y$$

$S(Y) = 0X - \dfrac{a}{\cos v\sqrt{a^2+\sin^2 v}} Y$ olduğundan $S$ nin matrisi,

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{a\cos v}{(a^2+\sin^2 v)^{3/2}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{a}{\cos v\sqrt{a^2+\sin^2 v}} \end{bmatrix}$$ olur.

## Örnek

$xy=1$ denklemi ile verilen yüzeyin şekil operatörünün matrisini bulunuz.

## Çözüm:

$x\neq 0$, $y\neq 0$ olacağından $\phi(u,v)=(u,\frac{1}{u},v)$ parametrik ifadesini kullanabiliriz

$\phi_u=(1,-\frac{1}{u^2},0)$, $\phi_v=(0,0,1)$ olup $\phi_u \perp \phi_v$ olduğundan $\{\phi_u,\phi_v\}$ lineer bağımsızdır. boy $\chi(M)=2$ ve $\{\phi_u,\phi_v\}$ lineer bağımsız olduğundan $\{\phi_u,\phi_v\}$ $\chi(M)$ için bazdır. Bir ortonormal baz seçelim.

$$X=\frac{\phi_u}{\|\phi_u\|}\ ,\quad Y=\frac{\phi_v}{\|\phi_v\|}$$ olmak üzere $\{X,Y\}$ $\chi(M)$ için ortonormal

baz olur.

$$\|\phi_u\|=\frac{\sqrt{1+u^4}}{u^2}\ ,\quad \|\phi_v\|=1$$ olup

$$X=\frac{1}{\sqrt{1+u^4}}(u^2,-1,0)\ ,\quad Y=(0,0,1)$$ bulunur.

Yüzeyin birim normal vektörü $N = \dfrac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$ olmak üzere,

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}(-1, -u^2, 0) \text{ bulunur.}$$

$S(X) = aX + bY$ ve $S(Y) = cX + dY$ yazacağız.

$$S(X) = D_X N = D_{\frac{\phi_u}{\|\phi_u\|}} N = \frac{1}{\|\phi_u\|} D_{\phi_u} N = \frac{1}{\|\phi_u\|} \frac{dN}{du}$$

$$\frac{dN}{du} = \frac{-2u^3}{(1+u^4)^{3/2}}(-1, -u^2, 0) + \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}(0, -2u, 0)$$

$$\Rightarrow S(X) = -\frac{2u^5}{(1+u^4)^2}(-1, -u^2, 0) + \frac{u^2}{1+u^4}(0, -2u, 0)$$

$$= \left(\frac{2u^5}{(1+u^4)^2}, \frac{-2u^3}{(1+u^4)^2}, 0\right)$$



$$= \frac{2u^3}{(1+u^4)^{3/2}} X$$

$$S(Y) = D_Y N = \frac{1}{\|\Phi_v\|} \frac{dN}{dv}$$

$$\frac{dN}{dv} = 0 \Rightarrow S(Y) = 0$$

$$\Rightarrow S(X) = \frac{2v^3}{(1+v^4)^{3/2}} X + 0Y$$

$$S(Y) = 0X + 0Y$$

olup S nin matrisi,

$$\begin{bmatrix} \frac{2v^3}{(1+v^4)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

## Örnek

$\mathbb{R}^3$ de silindir yüzeyinin şekil operatörünün matrisini bulunuz.

## Çözüm:

Silindir yüzeyini $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ olarak ifade edebiliriz.

Parametrik olarak $\phi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ yazılabilir.

$\phi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$, $\phi_v = (0,0,1) \Rightarrow \|\phi_u\| = \|\phi_v\| = 1$ dir.

$X = \phi_u$, $Y = \phi_v$ alınırsa $\{X, Y\}$ $\chi(C)$ için ortonormal baz olur.

Birim normal vektör $N = \dfrac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = (\cos u, \sin u, 0)$ bulunur.

$$S(X) = D_X N = D_{\phi_u} N = \frac{dN}{du} = (-\sin u, \cos u, 0) = 1X + 0Y$$

$$S(Y) = D_Y N = D_{\phi_v} N = \frac{dN}{dv} = 0 = 0X + 0Y \text{ olur.}$$

O halde $S$ nin matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

**Örnek**

$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=r^2\}$ küre yüzeyinin şekil operatörünün matrisini bulunuz.

**Çözüm:**

Yüzeyi tanımlamada kullanılan dönüşüm $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r^2=0$ olsun.

$\vec{\nabla} f=(2x,2y,2z)$ olup birim normal vektör alanı $N=\frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}=\frac{1}{r}(x,y,z)$ olur.

$X=(x_1,x_2,x_3)\in \chi(S^2)$ için $S(X)=D_X N=\left(X\left[\frac{1}{r}x\right],X\left[\frac{1}{r}y\right],X\left[\frac{1}{r}z\right]\right)$

$$\Rightarrow S(X)=\left(\frac{1}{r}x_1,\frac{1}{r}x_2,\frac{1}{r}x_3\right)=\frac{1}{r}X \text{ olur.}$$

Benzer şekilde $S(Y)=\frac{1}{r}Y$ olacağından

$$S(X)=\frac{1}{r}X+0Y$$
$$S(Y)=0X+\frac{1}{r}Y$$

den $S$ nin matrisi $\begin{bmatrix}1/r & 0\\ 0 & 1/r\end{bmatrix}=\frac{1}{r}I_2$ bulunur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi
# Fen Edebiyat Fakültesi
# Matematik Bölümü
# Dijital Ders Platformu

## Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 5