ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 4

E^n de Hiperyüzey

$E^n(\mathbb{R}^n)$ de,

$$M=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid f: M \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R},\ f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\ \vec{\nabla} f\big|_p \neq 0,\ \forall p\in M\}$$

kümesine hiperyüzey denir.

Not: E^n de bir M hiperyüzeyi için boy $M=n-1$ dir. Çünkü, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$ sisteminde bir denklem ve n bilinmeyen olduğundan sistemin $n-1$ tane parametreye bağlı çözümleri vardır.

Not: Aynı düşünce ile $\mathbb{R}^3$ de bir M yüzeyinin boyutu için boy$M=2$ dir.

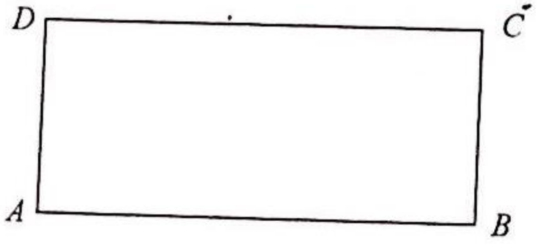
Yüzeyler Üzerinde Yönlendirme

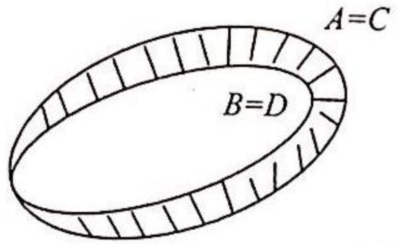
M yüzeyi üzerinde bir birim normal vektör alanı varsa yüzeye yönlendirilebilir yüzey denir. Yönlendirilebilir bir yüzey için $+N$ ve $-N$ olmak üzere iki türlü yönlendirme yapılabilir. Yani birim normal vektörü iki şekilde seçebiliriz.

Örnek

Küre yüzeyi yönlendirilebilir bir yüzeydir. Küre üzerinde her noktada +N (kürenin dışına doğru) veya her noktada −N (kürenin içine doğru) şeklinde birim normal vektör seçilebilir.

Möbius şeridi, Klein şişesi ve projektif düzlem ise yönlendirilemeyen yüzeylere birer örnektir. Möbius şeridi, ABCD dikdörtgeninden A köşesi C ile, D köşesi de B ile çakışacak şekilde elde edilen bir yüzeydir. Sürekli +N veya sürekli −N olacak şekilde bir birim normal vektörü yoktur.





Hiperyüzeyler Üzerinde Geodezikler

E^n de bir M hiperyüzeyi üzerinde geodezik denilen eğriler öyle özel eğrilerdir ki, E^n de doğruların oynadığı rolü M üzerinde oynarlar. Yani M üzerindeki iki nokta arasındaki en kısa mesafe bu eğriler boyunca ölçülür.

M, E^n de bir hiperyüzey ve $\alpha : I \to M$, M üzerinde bir eğri olsun. Eğer $\forall t \in I$ için $\alpha''(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t))$ ise α ya M üzerinde bir geodezik eğri denir. Yüzeyin birim normal vektör alanı N olmak üzere $T_M^{\perp}(\alpha(t)) = Sp\{N\}$ olacağından $\alpha''(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t))$ olması $\alpha''(t) = \lambda(t) N\big|_{\alpha(t)}$ olması demektir.

Örnek

E^n de bir M hiperyüzeyi verilsin. α eğrisi M üzerinde bir doğru parçası ise α M üzerinde bir geodeziktir:

$$\alpha : I \longrightarrow M$$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = \vec{p} + t\vec{v}$$

şeklindedir.

$\alpha'(t) = \vec{v}$ olup $\alpha''(t) = \vec{0}$ bulunur.

$\forall \vec{v}_p \in T_M(\alpha(t))$ için $\langle \alpha''(t), \vec{v}_p \rangle = \langle \vec{0}, \vec{v}_p \rangle = 0$ dır.

O halde dik uzay tanımından $\alpha''(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t))$ olur.

$\Rightarrow$ α bir geodeziktir.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ de bir M yüzeyi $x_1^2+x_2^2=1$ denklemi ile verilsin. Bu yüzey doğru silindir yüzeyidir. M üzerinde bir α eğrisi,

$$\alpha : I \longrightarrow M$$
$$t \to \alpha(t) = (\cos(at+b), \sin(at+b), ct+d)$$

ile tanımlansın. Bu eğri silindir üzerinde bir geodeziktir:

$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2=1\}$ şeklindedir. $\alpha(t)$ noktası $x_1^2+x_2^2=1$ denklemini sağladığından bu eğri M üzerindedir.

$$\alpha'(t) = (-a\sin(at+b), a\cos(at+b), c) \text{ olup}$$
$$\alpha''(t) = (-a^2\cos(at+b), -a^2\sin(at+b), 0) \text{ dır.}$$

Yüzeyi tanımlamada kullanılan fonksiyon $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+x_2^2-1=0$ şeklinde olsun. Yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} \text{ dır.}$$

$\vec{\nabla} f = (2x_1, 2x_2, 0)$ olup $\|\vec{\nabla} f\| = 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 2$ olur.

$\Rightarrow N = (x_1, x_2, 0)$ olacaktır.

O halde $N\big|_{\alpha(t)} = (\cos(at+b), \sin(at+b), 0)$ bulunur.

$\Rightarrow \alpha''(t)\big|_{\alpha(t)} = -a^2 N\big|_{\alpha(t)}$ elde edilir. O halde α eğrisi

M üzerinde geodeziktir.

Uyarı:

1) $a = 0$ ise $\alpha(t) = (\cos b, \sin b, ct + d)$ olur.

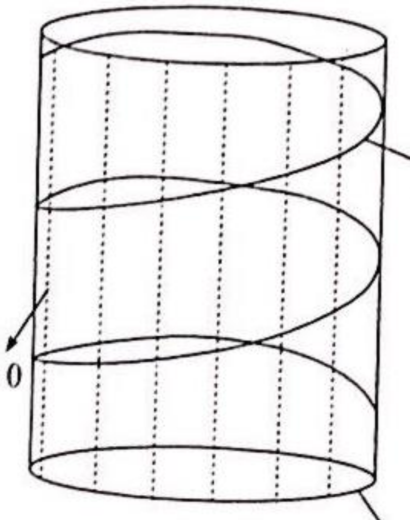
$\alpha(t) = (\cos b, \sin b, d) + t(0, 0, c)$ olup $(\cos b, \sin b, 0)$ noktasından

geçen ve doğrultmanı $(0, 0, c)$ olan bir doğrudur. O halde silindirin

ana doğruları geodeziktir.

2) $c=0$ ise $\alpha(t)=(\cos(at+b),\sin(at+b),d)$ olur. Bu ise silindirin eksenine dik olan çemberlerdir. O halde silindirin eksenine dik olan çemberler silindir üzerinde geodeziktirler.

3) $a\neq 0, c\neq 0$ ise $\alpha(t)=(\cos(at+b),\sin(at+b),ct+d)$ olur. Bu ise silindir üzerine sarılı helis eğrisidir. O halde silindirin helisleri silindir üzerinde birer geodeziktir.



Teorem 1: Geodeziklerin her noktalarındaki hız vektörlerinin uzunlukları sabittir. (Geodeziklerin çiziliş hızları sabittir)

İspat:

M, E^n de bir hiperyüzey ve $\alpha : I \to M$ eğrisi de M üzerinde bir geodezik olsun. Yani $\alpha''(t)\big|_{\alpha(t)} = \lambda N\big|_{\alpha(t)}$ olsun. $\|\alpha'(t)\| = \text{sabit}$ olduğunu göstereceğiz.

$$\frac{d}{dt}\|\alpha'(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle$$

$$= \langle \alpha''(t), \alpha'(t)\rangle + \langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle$$

$$= 2\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle \quad \text{olur.}$$

$\alpha'(t) \in T_M(\alpha(t))$ ve α geodezik olduğundan $\alpha''(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t))$ olup

$$\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle = 0 \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|\alpha'(t)\|^2 = 0 \Rightarrow \|\alpha'(t)\|^2 = \text{sabit} \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \text{sabit} \quad \text{bulunur.}$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 4