



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

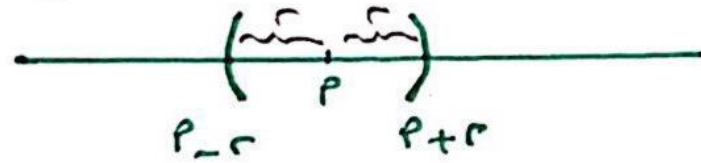
Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 3

YÜZEYLER TEORİSİ

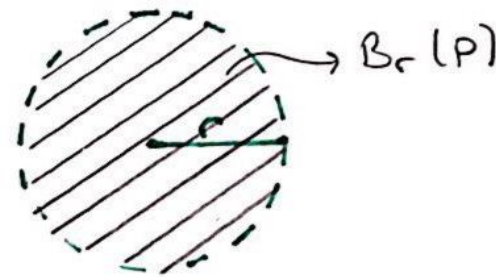
Tanım: $P \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için $B_r(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(P, x) < r\}$ kümesine \mathbb{R}^n de **açık** adı verilir.

* $n=1$ için $B_r(P) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(P, x) < r\}$ olup $B_r(P) = (P-r, P+r)$ açık aralıktır.



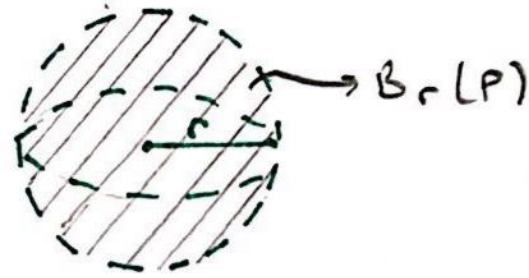
O halde \mathbb{R} nin açıkları açık aralıklardır.

* $n=2$ için $B_r(P) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, x) < r\}$ olup $B_r(P)$, P merkezli r yarıçaplı çemberin iç bölgesidir. (Çember dahil değil)

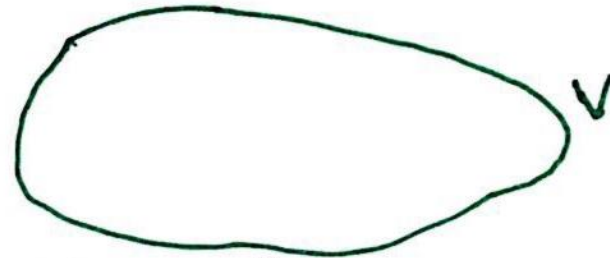
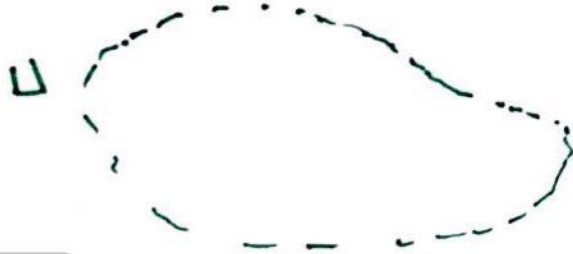


0 halde, \mathbb{R}^2 nin aoklara aok disklerdir.

* $n=3$ iuin $B_r(P) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(P,x) < r\}$ olup \mathbb{R}^3 ün aoklara P merkezli, r yarıçaplı kürenin iç bölgesidir (küre dahil değil)



Tanım: $U \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi verilsin. $\forall P \in U$ iuin P yi iueren bir $B_r(P) \subset U$ auiğı bulunabilirse U ya \mathbb{R}^n de **aok alt küme** denir.



V kümesi \mathbb{R}^2 de aok alt küme değildir.



Tanım: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tüm kısmi türevleri var ve
 $(u, v) \rightarrow f(u, v)$

sürekli ise f ye **diferansiyellenebilir** (C^∞ -sınıfından) fonksiyon
 derir.

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

fonksiyonu için $x, y, z: D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlara dif. bilir ise f ye **diferansiyellenebilir** (C^∞ -sınıfından) fonksiyon derir.

Örnek:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(u, v) = (u^2 + u \sin v - e^v)$$

ve

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(u, v) = (u^2 - v^2, uv, \sin u \cos v)$$

fonksiyonları dif. bilirdir.



Yüzey Kavramı: Birkaç küçük parçası alalım. Bunları bir masanın üzerinde düzlestirelim. Daha sonra her birini tuhaf görünümlü küçük parçaları haline getirip bu parçaları bir araya yaptırıp kenarları ve köşeleri düzlestirelim. Sonunda ortaya çıkan nesne 3-bayutlu uzayda bir yüzey olacaktır.

Tanım: U, \mathbb{R}^2 de bir açık altküme olsun.

$$U: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{dif. bilir dönüşüm olmak üzere } U(U) \subset \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow U(u, v)$$

alt kümesine \mathbb{R}^3 de **parametrize edilmiş yüzey** denir.

Eğer U dönüşümü regüler ise yüzey, **regüler parametrize edilmiş yüzey** adını alır.



Yüzey için aşağıdaki tanımı da verebiliriz:

Tanım: Bir regüler S yüzeyi \mathbb{R}^3 'ün aşağıdaki özellikleri sağlayan bir alt kümesidir:

$\forall P \in S$ için bir $V \subset \mathbb{R}^3$ açığı ile bir $U \subset \mathbb{R}^2$ açığı bulunabilir ve

$\mathcal{U}: U \rightarrow S \cap V \subset \mathbb{R}^3$ dönüşümü için

1) \mathcal{U} bir homeomorfizmdir.

2) \mathcal{U} dif. bilitir.

3) \mathcal{U} regülerdir (\mathcal{U} 'nin U_x türev dönüşümünün jacobian matrisi $\tilde{j}(\mathcal{U}, P)$ olarak üzere $\text{rank } \tilde{j}(\mathcal{U}, P) = 2$ dir)

özellikleri sağlar.

• Bu ikinci tanım muhtemelen biraz karmaşık gibi gelebilir.

Şimdi bu tanımın ne anlama geldiğini açıklayalım:



Yüzey için aşağıdaki tanımı da verebiliriz:

Tanım: Bir regüler S yüzeyi \mathbb{R}^3 'ün aşağıdaki özellikleri sağlayan bir alt kümesidir:

$\forall P \in S$ için bir $V \subset \mathbb{R}^3$ açığı ile bir $U \subset \mathbb{R}^2$ açığı bulunabilir ve

$\mathcal{U}: U \rightarrow S \cap V \subset \mathbb{R}^3$ dönüşümü için

1) \mathcal{U} bir homeomorfizmdir.

2) \mathcal{U} dif. bilitir.

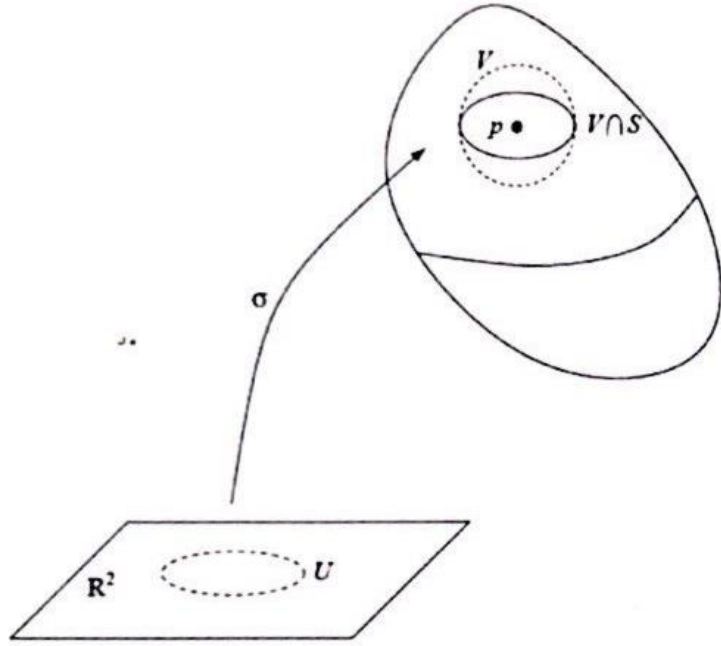
3) \mathcal{U} regülerdir (\mathcal{U} 'nin U_* türev dönüşümünün jacobien matrisi $\tilde{j}(\mathcal{U}, P)$ olmak üzere $\text{rank } \tilde{j}(\mathcal{U}, P) = 2$ dir)

özellikleri sağlanır.

Bu ikinci tanım muhtemelen biraz karmaşık gibi gelebilir.

Şimdi bu tanımın ne anlama geldiğini açıklayalım:





Yukarıdaki U dönüşümüne bir **yüzey yaması** veya **yüzey parametrisasyonu** adı verilir. Yukarıda açıklanan durum VPES iştir. Yani yüzey, \mathbb{R}^3 ün yüzey yamalarıyla örtülebilen bir alt kümesidir. Her bir yüzey yaması \mathbb{R}^2 nin bir parçasına benzemektedir.

* U nin bir homeomorfizm olması, yüzey üzerindeki her noktanın bir cömleğin tarafından yapılan ve birbirine yapıştırılan cömlek parçalarından birinde olması demektir.

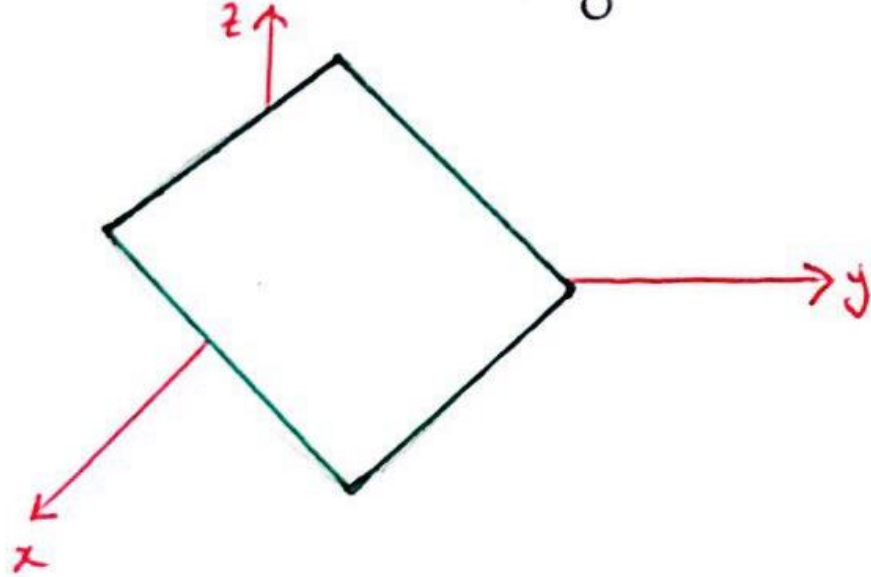
* U nin regüler olması $\tilde{J}(U, P)$ nin rankının 2 olması yani yüzeyin her noktasında bir teğet düzlemin (ileride açıklanacak) bulunması anlamına gelir.

* U 'nin dif. bilir olması sadece diferansiyel geometri yapmamız içindir.
Yani türevleri kullanarak bu nesneyi incelemek içindir.

Not: Bu ders boyunca yüzey denildiğinde regüler yüzey anlaşılacaktır.

Yüzey Örnekleri

1) Düzlem $ax + by + cz + d = 0$



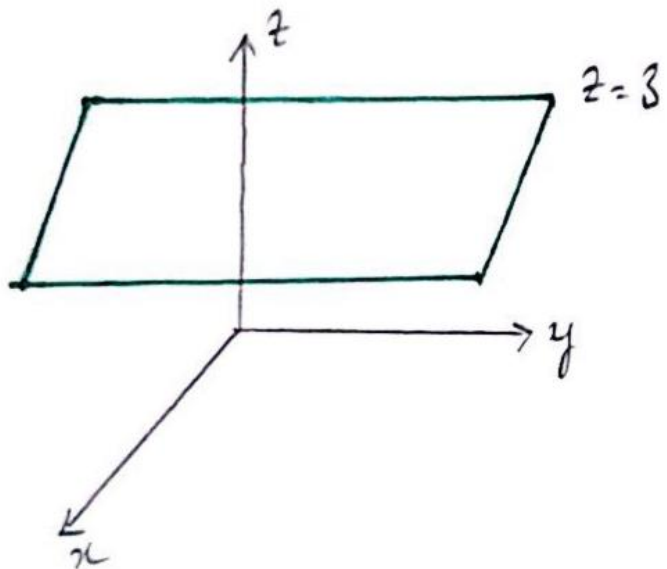
$$U(x, y) = (x, y, \frac{1}{c}(d - ax - ay))$$

$$U(u, v) = (u, v, \frac{1}{c}(d - au - av))$$

$$U^{-1}(p^1, p^2, p^3) = (p^1, p^2)$$

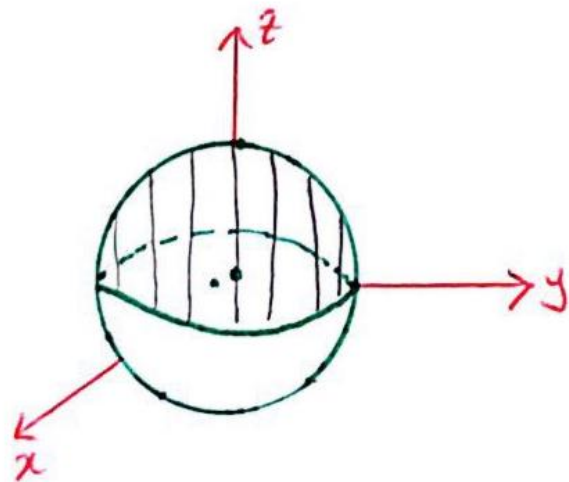
parametrizasyonuna sahiptir.

2)



$U(u,v) = (u,v,3)$
parametrizasyonuna sahiptir.

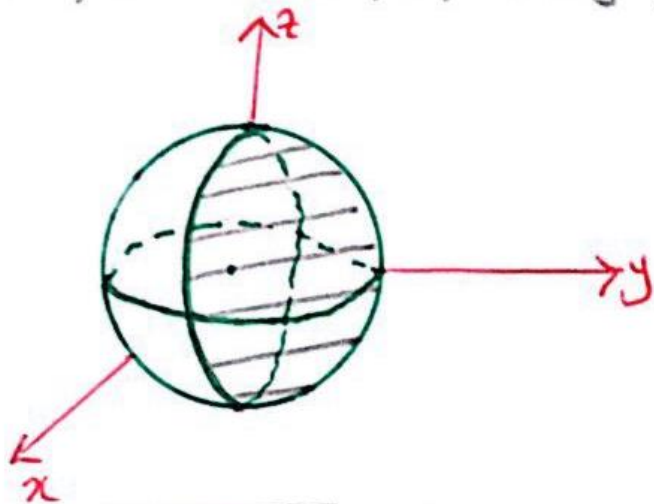
3) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi için bir parametrizasyon,
 $U(u,v) = (u,v, \sqrt{1-u^2-v^2})$ olup bu kürenin üst yarı küreyi verir.



$u_1(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$ parametrisasyonu alt yarı küreyi verecektir.

Benzer şekilde,

$u_2(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$ sağ yarı küreyi,



$u_3(u,v) = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$ ise sol yarı küreyi verecektir.

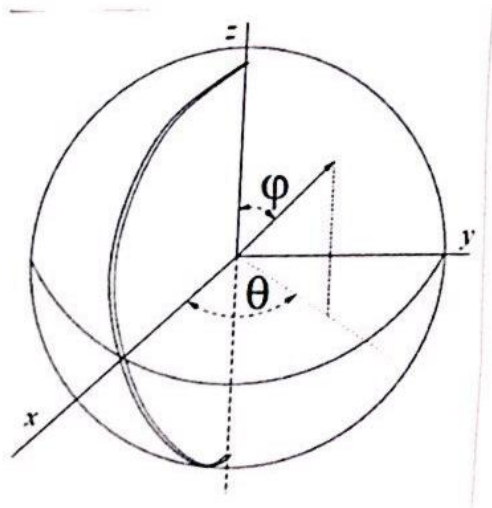
$u_4(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$ ön yarı küreyi,

$u_5(u,v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$ ise arka yarı küreyi verecektir.

4) $S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ kümesinin bir regüler yüzey olduğunu yüzey parametrelerini kullanarak gösterelim:

$$U_1: (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad U_1(\theta, \phi) = (\cos\theta \cos\phi, \sin\theta \cos\phi, \sin\phi)$$

yüzey parçası $y=0, x>0$ kümesi ile kürenin arakesiti olan yay olundaki kürenin tüm noktalarını örter.



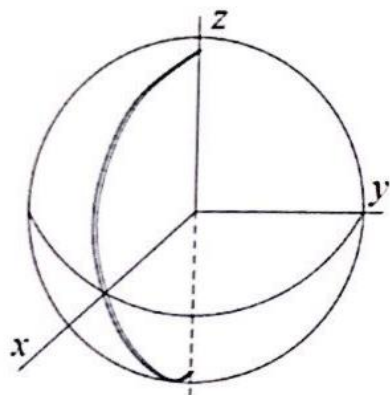
$$U_2: (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad U_2(\theta, \phi) = (\sin\phi, \cos\theta \cos\phi, \sin\theta \cos\phi)$$



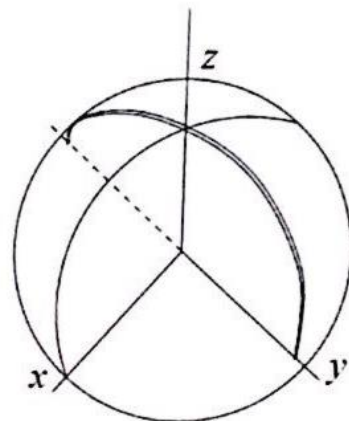
Scanned with
CamScanner

$$U_3: (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad U_3(\theta, \phi) = (\sin\theta \cos\phi, \sin\phi, \cos\theta \cos\phi)$$

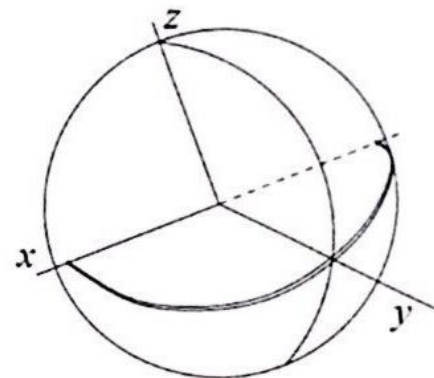
olarak alınırsa U_1 ve U_2 , $(0,0,1)$ noktası dışında tüm S^2 'yi örter.
 Bu noktayı da U_3 örtecektir.



U_1



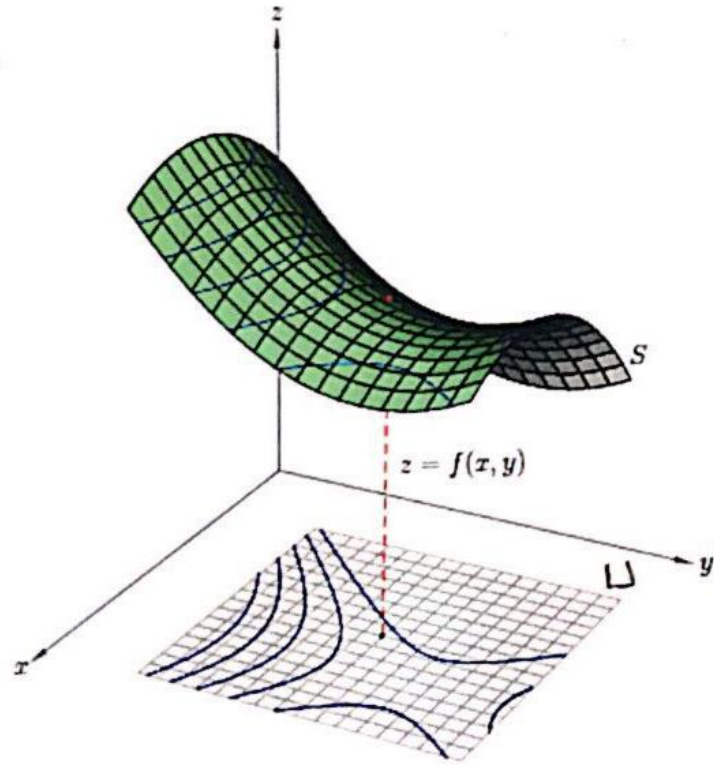
U_2



U_3

Örnek: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu dif. bilir olsun. f 'nin grafiği bir tek yüzey yaması ile örtülebilen bir regüler yüzeydir:

f 'nin grafiği $S = \{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega \}$ noktalarının kümesidir.



$$\mathcal{U}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathcal{U}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

fonksiyonunu tanımlayalım. \mathcal{U} tanımdaki 3 özellik sağlar. Yani \mathcal{U} bir yüzey yamasıdır:

1) S 'nin tanımında \mathcal{U} örtendir.

$\forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \Omega$ için

$$(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \text{ için } \mathcal{U}(u_1, v_1) \neq \mathcal{U}(u_2, v_2)$$

olacağından \mathcal{U} 1:1 dir. u, v ve $f(u, v)$

sürekli olduğundan \mathcal{U} de sürekli dir.

$U^{-1}(u, v, f(u, v)) = (u, v)$ olup u ve v sürekli olduğundan U^{-1} de sürekli dir.

2) u, v ve f dif. bilir olduğundan U dif. bilir dir.

3) **Hatırlatma (Ters Fonksiyon Teoremi):** $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, herhangi bir $P \in \mathbb{R}^n$ noktasında $U|_P$ birebir olacak şekilde bir dönüşüm olsun. Bu durumda $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ homeomorfizm olacak şekilde P nin bir U komşuluğu ve $F(P)$ nin bir V komşuluğu bulunabilir.

0 halde U nin homeomorfizm olduğunu göstermek için $U|_P$ türev dönüşümünün birebir olduğunu veya buna denk olan $\text{rank } \tilde{J}(U, P) = 2$ olduğunu göstermeliyiz:

$$\tilde{J}(U, P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{bmatrix} \text{ olup } \text{rank } \tilde{J}(U, P) = 2 \text{ dir.}$$



Scanned with
CamScanner

0 halde U bir yüzey yamasıdır. Yani S bir regüler yüzeydir.

Örnek: $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ bir dif. bilir fonksiyon olsun.

$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0, \nabla F|_p \neq 0, \forall p \in S \}$ kümesi bir regüler yüzeydir:

Bu durum Ters Fonksiyon Teoreminin bir sonucudur.

$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y)$ dir. O halde S bir f fonksiyonunun grafiği olup regüler yüzeydir.

Not: S yüzeyinin tamamı bir fonksiyonun grafiği olmayabilir.

Örneğin; $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ küre yüzeyi için;

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ nin grafiği üst yarı küreye karşılık gelir.

$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ nin grafiği alt yarı küreye karşılık gelir.

$y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$ nin grafiği sağ yarı küreye karşılık gelir.

$y = -\sqrt{1 - x^2 - z^2}$ nin grafiği sol yarı küreye karşılık gelir.

$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ nin grafiği ön yarı küreye karşılık gelir.

$x = -\sqrt{1 - y^2 - z^2}$ nin grafiği arka yarı küreye karşılık gelir.



Scanned with
CamScanner

Örnek: Küre denkleminin bir yüzey belirttiğini yukarıdaki örneği kullanarak gösterelim:

$$S^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0 \}$$

denklemi 0 merkezli ve r yarıçaplı küre denklemdir.

$\forall P = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$ için $\vec{\nabla} F|_P = (2p_1, 2p_2, 2p_3) \neq 0$ olup S^2 yüzüdür.

Örnek: $M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2 \}$ kütlesi \mathbb{R}^3 de yüzey midir?

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ dir.

$\forall P = (p_1, p_2, p_3) \in M$ için $\vec{\nabla} F|_P = (2p_1, 2p_2, -2p_3)$ olup $P = (0, 0, 0) \in M$ için $\vec{\nabla} F|_P = 0$ olur. O halde M yüzey değil, fakat $M - \{ (0, 0, 0) \}$ kümesi yüzeydir.

Yüzeyin Teğet Vektörü (Yüzey Üzerinde Tanjant Vektör)

M , \mathbb{R}^3 de bir yüzey ve $P \in M$ olsun. Eğer $\vec{v}_P \in T_{\mathbb{R}^3}(P)$ için \vec{v}_P , P den geçen ve yüzey üzerinde yatan bir eğrinin teğet vektörü ise \vec{v}_P ye M in $P \in M$ deki teğet vektörü denir. $P \in M$ deki tüm teğet vektörlerin kümesi $T_M(P)$ dir.



Yüzey Normali

M yüzeyinin bir P noktasından geçen ve yüzey üzerinde yatan bütün eğrilerin P deki teğetlerine dik olan vektöre yüzeyin P noktasındaki **normal vektörü** denir.

\mathbb{E}^3 de verilen M yüzeyini tanımlamada kullanılan fonksiyon f olsun. Yüzey denklemleri bu durumda $f(x, y, z) = 0$ olacaktır. Yüzeyin bir P noktasından geçen eğrinin denklemleri, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ile verilsin. $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$ olacaktır. t ye göre türev alınırsa,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\nabla} f, \alpha'(t) \rangle = 0 \text{ bulunur.}$$

Sonuç: \mathbb{R}^3 de f fonksiyonu yardımıyla tanımlanan M yüzeyinin $P \in M$ noktasındaki normal vektörü $\vec{\nabla}f|_P$ dir.

Yüzeyin Teğet Düzlemi

\mathbb{R}^3 de bir M yüzeyi ve $P \in M$ noktası verilsin. $P \in M$ den geçen ve yüzeyin $P \in M$ deki normalini $(\vec{\nabla}f|_P)$ normal kabul eden düzleme yüzeyin P noktasındaki **teğet düzlemi** denir.

Örnek:

$f(x, y, z) = x^2yz - y + z - 5 = 0$ denklemi ile verilen yüzeyin $P(1, 1, 3)$ noktasındaki normal vektörünü ve teğet düzleminin denklemini bulalım:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}f|_P &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_P, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_P, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_P \right) \\ &= \left(2xyz \Big|_P, (x^2z - 1) \Big|_P, (x^2y + 1) \Big|_P \right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f|_p = (6, 2, 2) \text{ olur.}$$

Yüzeyin normali teğet düzleminin normali olacağından teğet düzleminin denklemi

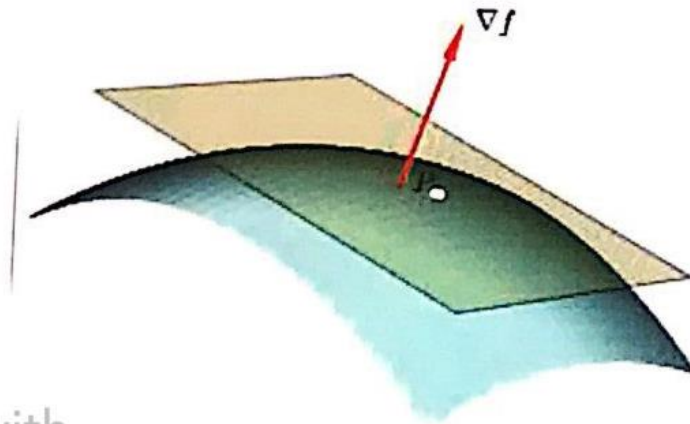
$$6x + 2y + 2z + d = 0$$

dir. Düzlem $P(1,1,3)$ den geçeceğinden,

$$6 + 2 + 6 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = -14$$

$$\Rightarrow 3x + y + z - 7 = 0$$



Teğet düzlem, $p \in M$ deki tüm teğet (tanjant) vektörlerin kümesidir. Yani $T_p(p)$ dir.



Not: $\mathcal{U}: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$(u, v) \rightarrow \mathcal{U}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ dif. bir dönüşümün

Jakobien matrisi

$$[\mathcal{U}_*] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix}$$

dir. Bu matrisin rankının 2 olması demek, sütun vektörlerinden oluşan $\left\{ \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u} \right)}_{\mathcal{U}_u}, \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v} \right)}_{\mathcal{U}_v} \right\}$ kümesinin yani $\{\mathcal{U}_u, \mathcal{U}_v\}$ 'nin

linear bağımsız olması demektir. O halde $\mathcal{U}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ 'ün yüzey olması için gerek ve yeter şart, $\{\mathcal{U}_u, \mathcal{U}_v\}$ kümesinin linear bağımsız olmasıdır.

Örnek:

$z = xy$ denklemiyle verilen \mathbb{R}^3 'ün alt kümesinin yüzey olduğunu gösterelim:

$$z = xy \text{ denklemini } \mathcal{U}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \rightarrow \mathcal{U}(u, v) = (u, v, uv)$$

şeklinde parametrelendirelim.

$\mathcal{U}_u = (1, 0, v)$, $\mathcal{U}_v = (0, 1, u)$ olup $\{\phi_u, \phi_v\}$ linear bağımsızdır.

O halde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$ kümesi \mathbb{R}^3 'de yüzeydir.

Örnek:

$z^2 = x^2 + y^2$ denklemiyle verilen \mathbb{R}^3 'ün alt kümesinin yüzey olup olmadığını araştıralım:

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$ dir. S için bir parametrisasyon

$\mathcal{U}(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{u^2 + v^2})$ şeklindedir.

$f_1(u, v) = u$, $f_2(u, v) = v$, $f_3(u, v) = \pm\sqrt{u^2 + v^2}$ olup $\frac{\partial f_3}{\partial u} = \pm \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$,
 $\frac{\partial f_3}{\partial v} = \pm \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ dir. $u = v = 0$ için \mathcal{U} dif. bilir olmadığından

S yüzey değildir. Fakat $S - \{(0, 0, 0)\}$ kümesi yüzeydir.

Parametre Eğrileri

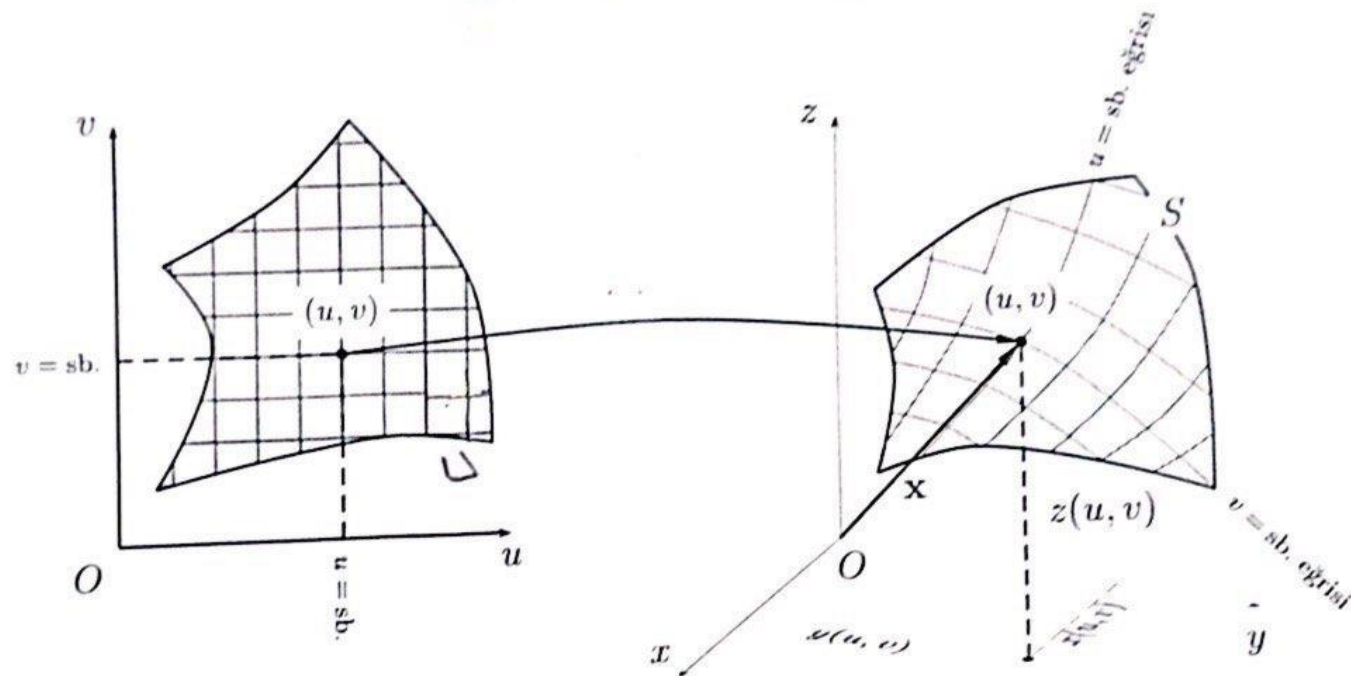
$\mathcal{U}: \mathbb{U} \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ parametrisasyonu ile verilen yüzeyi

$(u, v) \rightarrow \mathcal{U}(u, v)$ olarak alırız.

* $u = u_0 = \text{sabit}$ için $\mathcal{U}(u_0, v)$ noktalarının oluşturduğu $\mathcal{U}(u_0, v) = \beta(v)$ eğrisi yüzey üzerinde v -parametresine bağlı bir eğridir.

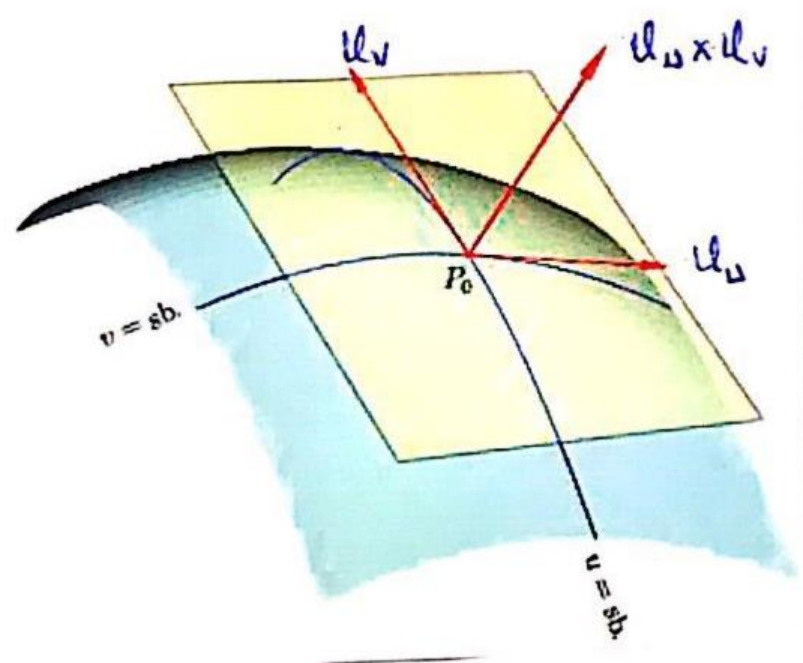
* $v = v_0 = \text{sabit}$ için $\mathcal{U}(u, v_0)$ noktalarının oluşturduğu $\mathcal{U}(u, v_0) = \alpha(u)$ eğrisi yüzey üzerinde u -parametresine bağlı bir eğridir.

$\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ eğrilerine yüzeyin **parametre eğrileri** denir.



U düzlem bölgesinin S yüzey parçasına izdüşümü

U bölgesindeki bir nokta $u = sb.$ ve $v = sb.$ doğrularının kesişimi iken bu noktanın S deki karşılığı $u = sb.$ ve $v = sb.$ eğrilerinin kesişimi ile



$u = u(u, v)$ ile verilen yüzeyin normal vektörü $u_u \times u_v$ olarak alınabilir. Birim normal vektörü ise $\vec{n} = \frac{u_u \times u_v}{\|u_u \times u_v\|}$ dir.

Örnek:

$\mathcal{U}(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ yüzeyinin birim normal vektörünü

bulunuz.

Çözüm:

$$\mathcal{U}_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \quad \mathcal{U}_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$\mathcal{U}_u \times \mathcal{U}_v = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin u \cos v & -\sin u \sin v & \cos u \\ -\cos u \sin v & \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-\cos^2 u \cos v, -\cos^2 u \sin v, -\sin u \cos u)$$

$$\|\mathcal{U}_u \times \mathcal{U}_v\| = |\cos u| \sqrt{\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u} = |\cos u| \text{ olup}$$

$\vec{n} = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ alınabilir.

PROBLEMLER

1) $x^2 + y^2 - 2z = 0$ denklemleri eliptik paraboloidin yüzey olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z = 0\} \text{ olsun.}$$

$$\forall p \in M \text{ için } \vec{\nabla} F|_p = ?$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$= (2x, 2y, -2)$$

$$\vec{\nabla} F|_p = (2p_1, 2p_2, -2) \neq 0$$

$\Rightarrow M$ yüzeydir.

2) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ tek kanatlı hiperboloidinin yüzey olduğunu gösteriniz.

Yüzeyin birim normal vektör alanını bulunuz.

Çözüm:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\} \text{ olsun.}$$

$$\vec{\nabla} F = (2x, 2y, -2z)$$

sadece $P = (0, 0, 0)$ için $\vec{\nabla} F|_P = 0$ dir. Fakat $P \notin M$ dir.

Yani $\forall P \in M$ için $\vec{\nabla} F|_P \neq 0$ dir.

$\Rightarrow M$ yüzeydir.

Birim normal vektör alanı, $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} F}{\|\vec{\nabla} F\|}$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, -z)$$

3) \mathbb{R}^3 de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ yüzeyi için

$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ parametrik ifadesi yazılabilir. Bu parametrik ifade ile birlikte $\phi(\mathbb{R}^2)$ nin yüzey olduğunu gösteriniz. Bu yüzey üzerinde seçtiğiniz bir noktadaki teğet düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$\{\phi_u, \phi_v\}$ lineer bağımsız olmalıdır.

$$\phi_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \quad \phi_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$\lambda_1 \phi_u + \lambda_2 \phi_v = 0 \text{ olsun. Buradan } -\lambda_1 \sin u \cos v - \lambda_2 \cos u \sin v = 0$$

$$-\lambda_1 \sin u \sin v + \lambda_2 \cos u \cos v = 0$$

$$\lambda_1 \cos u = 0 \text{ bulunur.}$$

son denklemden $\cos u \neq 0$ ise $\lambda_1 = 0$. ilk iki denklemden

$$\lambda_2 \cos u \sin v = 0, \quad \lambda_2 \cos u \cos v = 0 \text{ olup } \lambda_2 = 0 \text{ olur.}$$



0 halde $\cos u \neq 0$ için $\{\phi_u, \phi_v\}$ lineer bağımsız olup $\phi(\mathbb{R}^2)$ bir yüzeydir.

$\Rightarrow M = \{\phi(u, v) \mid u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ yüzeydir.

$(u, v) = (0, \frac{\pi}{2})$ için $\phi(0, \frac{\pi}{2}) = (0, 1, 0)$ noktasındaki teğet düzlemi bulalım:
Önce bu noktadaki normal vektörünü hesaplayalım. Bu ise

$$(\phi_u \times \phi_v) \Big|_{(0, \pi/2)} \text{ dir.}$$

$\phi_u(0, \pi/2) = (0, 0, 1)$, $\phi_v(0, \pi/2) = (-1, 0, 0)$ olup normal vektör,

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, 0) \text{ dir.}$$



0 halde teget düzlemin denklemi,

$$-y + d = 0 \text{ olur.}$$

Düzlem $(0, 1, 0)$ dan geçeceğinden,

$$-1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$$

$$\Rightarrow -y + 1 = 0 \text{ bulunur.}$$

$$4) \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \psi(u, v) = (u \cos v - 2, -v + 5, u \sin v - 2)$$

Olmak üzere $\psi(\mathbb{R}^2)$ nin yüzey olduğunu gösteriniz. ψ_* türev dönüşümünün matrisini bulunuz.

5) $\phi(u, v) = (u, v, uv)$ parametrik denklemi ile verilen $M = \phi(\mathbb{E}^2)$ yüzeyinin $P(1, 2, 2)$ noktasındaki teget düzlemini bulunuz.

PROBLEMLER

1) $x^2 + y^2 - 2z = 0$ denklemleri eliptik paraboloidin yüzey olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z = 0\} \text{ olsun.}$$

$$\forall p \in M \text{ için } \vec{\nabla} F|_p = ?$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$= (2x, 2y, -2)$$

$$\vec{\nabla} F|_p = (2p_1, 2p_2, -2) \neq 0$$

$\Rightarrow M$ yüzeydir.

2) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ tek kanatlı hiperboloidinin yüzey olduğunu gösteriniz.

Yüzeyin birim normal vektör alanını bulunuz.

Çözüm:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\} \text{ olsun.}$$

$$\vec{\nabla} F = (2x, 2y, -2z)$$

sadece $P = (0, 0, 0)$ için $\vec{\nabla} F|_P = 0$ dir. Fakat $P \notin M$ dir.

Yani $\forall P \in M$ için $\vec{\nabla} F|_P \neq 0$ dir.

$\Rightarrow M$ yüzeydir.

Birim normal vektör alanı, $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} F}{\|\vec{\nabla} F\|}$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, -z)$$

3) \mathbb{R}^3 de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ yüzeyi için

$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ parametrik ifadesi yazılabilir. Bu parametrik ifade ile birlikte $\phi(\mathbb{R}^2)$ nin yüzey olduğunu gösteriniz. Bu yüzey üzerinde seçtiğiniz bir noktadaki teğet düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$\{\phi_u, \phi_v\}$ lineer bağımsız olmalıdır.

$$\phi_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \quad \phi_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$\lambda_1 \phi_u + \lambda_2 \phi_v = 0 \text{ olsun. Buradan } -\lambda_1 \sin u \cos v - \lambda_2 \cos u \sin v = 0$$

$$-\lambda_1 \sin u \sin v + \lambda_2 \cos u \cos v = 0$$

$$\lambda_1 \cos u = 0 \text{ bulunur.}$$

son denklemden $\cos u \neq 0$ ise $\lambda_1 = 0$. ilk iki denklemden

$$\lambda_2 \cos u \sin v = 0, \quad \lambda_2 \cos u \cos v = 0 \text{ olup } \lambda_2 = 0 \text{ olur.}$$



0 halde $\cos u \neq 0$ için $\{\phi_u, \phi_v\}$ lineer bağımsız olup $\phi(\mathbb{R}^2)$ bir yüzeydir.

$\Rightarrow M = \{\phi(u, v) \mid u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ yüzeydir.

$(u, v) = (0, \frac{\pi}{2})$ için $\phi(0, \frac{\pi}{2}) = (0, 1, 0)$ noktasındaki teğet düzlemi bulalım:
Önce bu noktadaki normal vektörünü hesaplayalım. Bu ise

$$(\phi_u \times \phi_v) \Big|_{(0, \pi/2)} \text{ dir.}$$

$\phi_u(0, \pi/2) = (0, 0, 1)$, $\phi_v(0, \pi/2) = (-1, 0, 0)$ olup normal vektör,

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, 0) \text{ dir.}$$



0 halde teget düzlemin denklemi,

$$-y + d = 0 \text{ olur.}$$

Düzlem $(0, 1, 0)$ dan geçeceğinden,

$$-1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$$

$$\Rightarrow -y + 1 = 0 \text{ bulunur.}$$

$$4) \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \psi(u, v) = (u \cos v - 2, -v + 5, u \sin v - 2)$$

olmak üzere $\psi(\mathbb{R}^2)$ nin yüzey olduğunu gösteriniz. ψ_* türev dönüşümünün matrisini bulunuz.

5) $\phi(u,v) = (u, v, uv)$ parametrik denklemi ile verilen $M = \phi(\mathbb{E}^2)$ yüzeyinin $P(1,2,2)$ noktasındaki teget düzlemini bulunuz.

PROBLEMLER

1) $x^2 + y^2 - 2z = 0$ denklemleri eliptik paraboloidin yüzey olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z = 0\} \text{ olsun.}$$

$$\forall p \in M \text{ için } \vec{\nabla} F|_p = ?$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$= (2x, 2y, -2)$$

$$\vec{\nabla} F|_p = (2p_1, 2p_2, -2) \neq 0$$

$\Rightarrow M$ yüzeydir.

2) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ tek kanatlı hiperboloidinin yüzey olduğunu gösteriniz.

Yüzeyin birim normal vektör alanını bulunuz.

Çözüm:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\} \text{ olsun.}$$

$$\vec{\nabla} F = (2x, 2y, -2z)$$

sadece $P = (0, 0, 0)$ için $\vec{\nabla} F|_P = 0$ dir. Fakat $P \notin M$ dir.

Yani $\forall P \in M$ için $\vec{\nabla} F|_P \neq 0$ dir.

$\Rightarrow M$ yüzeydir.

Birim normal vektör alanı, $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} F}{\|\vec{\nabla} F\|}$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, -z)$$

3) \mathbb{R}^3 de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ yüzeyi için

$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ parametrik ifadesi yazılabilir. Bu parametrik ifade ile birlikte $\phi(\mathbb{R}^2)$ nin yüzey olduğunu gösteriniz. Bu yüzey üzerinde seçtiğiniz bir noktadaki teğet düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$\{\phi_u, \phi_v\}$ lineer bağımsız olmalıdır.

$$\phi_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \quad \phi_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$\lambda_1 \phi_u + \lambda_2 \phi_v = 0 \text{ olsun. Buradan } -\lambda_1 \sin u \cos v - \lambda_2 \cos u \sin v = 0$$

$$-\lambda_1 \sin u \sin v + \lambda_2 \cos u \cos v = 0$$

$$\lambda_1 \cos u = 0 \text{ bulunur.}$$

son denklemden $\cos u \neq 0$ ise $\lambda_1 = 0$. ilk iki denklemden

$$\lambda_2 \cos u \sin v = 0, \quad \lambda_2 \cos u \cos v = 0 \text{ olup } \lambda_2 = 0 \text{ olur.}$$



0 halde $\cos u \neq 0$ için $\{\phi_u, \phi_v\}$ lineer bağımsız olup $\phi(\mathbb{R}^2)$ bir yüzeydir.

$\Rightarrow M = \{\phi(u, v) \mid u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ yüzeydir.

$(u, v) = (0, \frac{\pi}{2})$ için $\phi(0, \frac{\pi}{2}) = (0, 1, 0)$ noktasındaki teğet düzlemi bulalım:
Önce bu noktadaki normal vektörünü hesaplayalım. Bu ise

$$(\phi_u \times \phi_v) \Big|_{(0, \pi/2)} \text{ dir.}$$

$\phi_u(0, \pi/2) = (0, 0, 1)$, $\phi_v(0, \pi/2) = (-1, 0, 0)$ olup normal vektör,

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, 0) \text{ dir.}$$



0 halde teget düzlemin denklemi,

$$-y + d = 0 \text{ olur.}$$

Düzlem $(0, 1, 0)$ dan geçeceğinden,

$$-1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$$

$$\Rightarrow -y + 1 = 0 \text{ bulunur.}$$

$$4) \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \psi(u, v) = (u \cos v - 2, -v + 5, u \sin v - 2)$$

Olmak üzere $\psi(\mathbb{R}^2)$ nin yüzey olduğunu gösteriniz. ψ_* türev dönüşümünün matrisini bulunuz.

5) $\phi(u,v) = (u, v, uv)$ parametrik denklemi ile verilen $M = \phi(\mathbb{E}^2)$ yüzeyinin $P(1,2,2)$ noktasındaki teget düzlemini bulunuz.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



48

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 3