ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

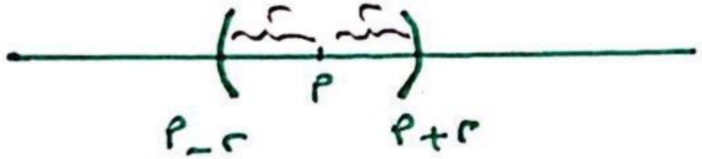
Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 2

YÜZEYLER TEORİSİ

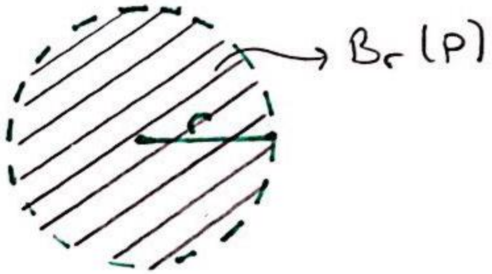
Tanım: $P\in\mathbb{R}^n$ ve $r>0$ için $B_r(P)=\{X\in\mathbb{R}^n \mid d(P,X)<r\}$ kümesine $\mathbb{R}^n$ de **açık** adı verilir.

* $n=1$ için $B_r(P)=\{X\in\mathbb{R} \mid d(P,X)<r\}$ olup $B_r(P)=(P-r,\ P+r)$ açık aralığıdır.



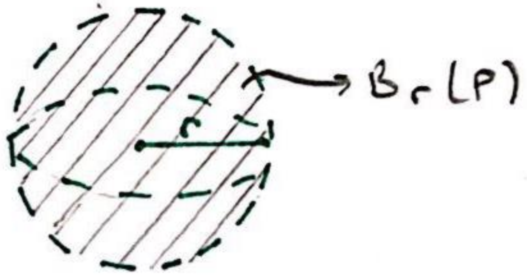
O halde $\mathbb{R}$ nin açıkları açık aralıklardır.

* $n=2$ için $B_r(P)=\{X\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,X)<r\}$ olup $B_r(P)$, P merkezli r yarıçaplı çemberin iç bölgesidir. (çember dahil değil)

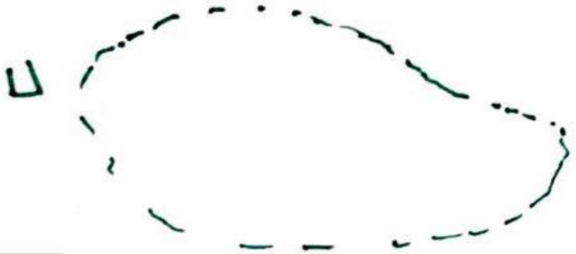


O halde, $\mathbb{R}^2$ nin açıkları açık disklerdir.

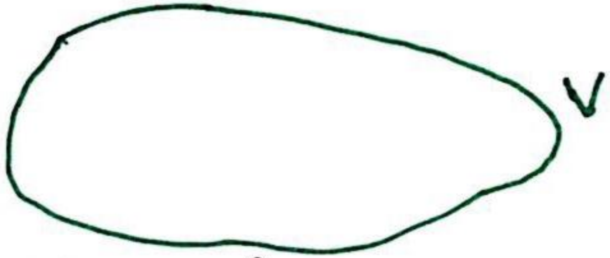
* $n=3$ için $B_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid d(P,X) < r\}$ olup $\mathbb{R}^3$ ün açıkları P merkezli, r yarıçaplı kürenin iç bölgesidir (küre dahil değil)



Tanım: $U \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi verilsin. $\forall P \in U$ için P yi içeren bir $B_r(P) \subset U$ açığı bulunabilirse U ya $\mathbb{R}^n$ de **açık alt küme** denir.



$\mathbb{R}^2$ de açık alt küme



V kümesi $\mathbb{R}^2$ de açık alt küme değildir.

Tanım: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun tüm kısmi türevleri var ve
$(u,v) \to f(u,v)$

sürekli iseler f ye diferansiyellenebilir (C^{∞}_sınıfından) fonksiyon denir.

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \to f(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

fonksiyonu için $x, y, z: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları dif. bilir iseler f ye diferansiyellenebilir (C^{∞} sınıfından) fonksiyon denir.

Örnek:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(u,v) = u^2 + u\sin v - e^v$$

ve

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(u,v) = (u^2 - v^2, uv, \sin u \cos v)$$

fonksiyonları dif. bilirdir.

Yüzey Kavramı: Birkaç kil parçası alalım. Bunları bir masanın üzerinde düzleştirelim. Daha sonra her birini tuhaf görünümlü gömlek parçaları haline getirip bu parçaları bir araya yapıştırıp kenarları ve köşeleri düzleştirelim. Sonuçta ortaya çıkan nesne 3-boyutlu uzayda bir yüzey olacaktır.

Tanım: U, $\mathbb{R}^2$ de bir açık altküme olsun.

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{dif. bilir dönüşüm olmak üzere } \varphi(U) \subset \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longrightarrow \varphi(u,v)$$

alt kümesine $\mathbb{R}^3$ de parametrize edilmiş yüzey denir.
Eğer φ dönüşümü regüler ise yüzey, regüler parametrize edilmiş yüzey adını alır.

Yüzey için aşağıdaki tanımı da verebiliriz:

Tanım: Bir regüler S yüzeyi $\mathbb{R}^3$ ün aşağıdaki özellikleri sağlayan bir alt kümesidir:

$\forall P \in S$ için bir $V \subset \mathbb{R}^3$ açığı ile bir $U \subset \mathbb{R}^2$ açığı bulunabilir ve $\varphi: U \to S \cap V \subset \mathbb{R}^3$ dönüşümü için

1) φ bir homeomorfizmdir.

2) φ dif. bilirdir.

3) φ regülerdir (φ nin φ_* türev dönüşümünün jakobien matrisi $J(\varphi, P)$ olmak üzere $\text{rank}\, J(\varphi, P) = 2$ dir)

özellikleri sağlanır.

Bu ikinci tanım muhtemelen biraz karmaşık gibi gelebilir. Şimdi bu tanımın ne anlama geldiğini açıklayalım:

Yüzey için aşağıdaki tanımı da verebiliriz:

Tanım: Bir regüler S yüzeyi $\mathbb{R}^3$ ün aşağıdaki özellikleri sağlayan bir alt kümesidir:

$\forall P \in S$ için bir $V \subset \mathbb{R}^3$ açığı ile bir $U \subset \mathbb{R}^2$ açığı bulunabilir ve $\varphi : U \to S \cap V \subset \mathbb{R}^3$ dönüşümü için

1) φ bir homeomorfizmdir.

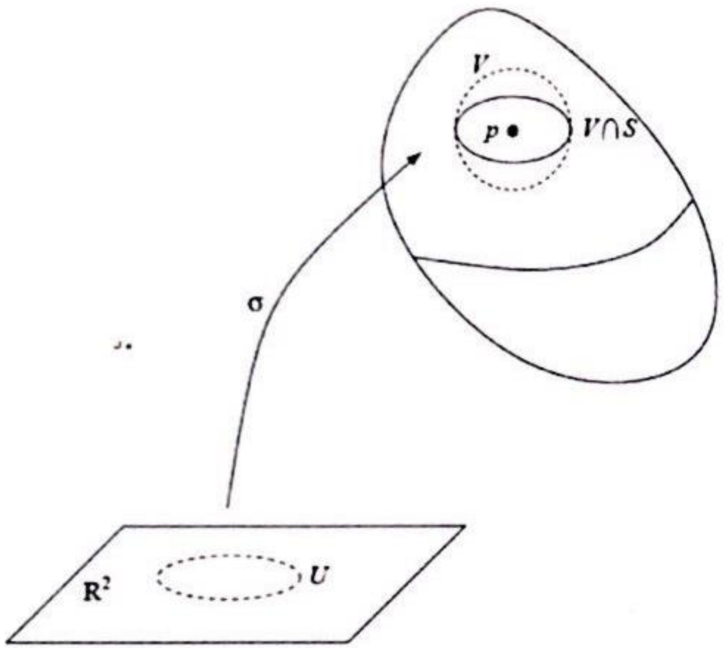
2) φ dif. bilirdir.

3) φ regülerdir (φ nin φ_* türev dönüşümünün jakobian matrisi $J(\varphi, P)$ olmak üzere rank $J(\varphi, P) = 2$ dir)

özellikleri sağlanır.

Bu ikinci tanım muhtemelen biraz karmaşık gibi gelebilir.

Şimdi bu tanımın ne anlama geldiğini açıklayalım:



Yukarıdaki σ dönüşümüne bir yüzey yaması veya yüzey parametrizasyonu adı verilir. Yukarıda açıklanan durum $\forall p \in S$ içindir. Yani yüzey, $\mathbb{R}^3$ ün yüzey yamalarıyla örtülebilen bir alt kümesidir. Her bir yüzey yaması $\mathbb{R}^2$ nin bir parçasına benzemektedir

* σ nin bir homeomorfizm olması, yüzey üzerindeki her noktanın bir çömlekçi tarafından yapılan ve birbirine yapıştırılan çömlek parçalarından birinde olması demektir.

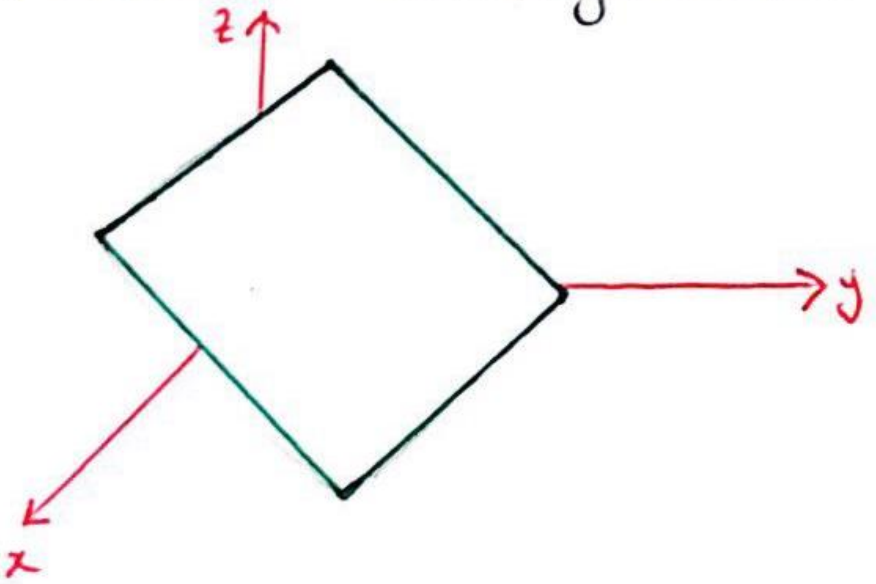
* σ nin regüler olması $J(\sigma, p)$ nin rankının 2 olması yani yüzeyin her noktasında bir teğet düzlemin (ileride açıklanacak) bulunması anlamına gelir.

* $\mathcal{U}$ nın dif.bilir olması sadece diferansiyel geometri yapmamız içindir. Yani türevleri kullanarak bu nesneyi incelemek içindir.

Not: Bu ders boyunca yüzey denildiğinde regüler yüzey anlaşılacaktır.

Yüzey Örnekleri

1) Düzlem $ax+by+cz+d=0$



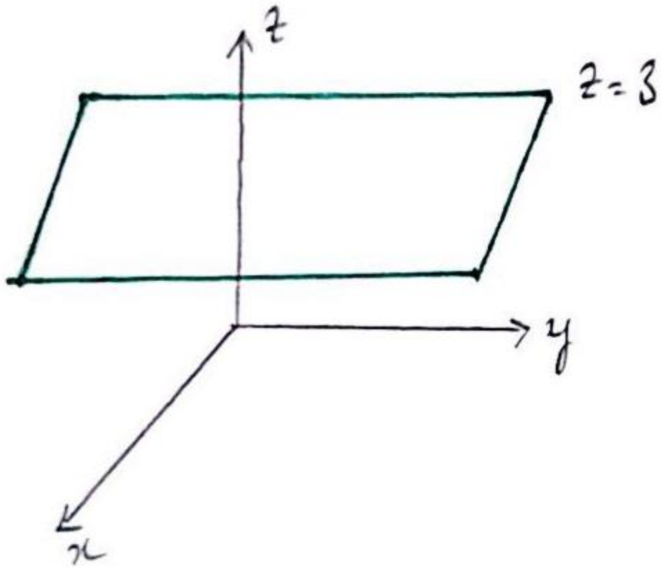
$$\mathcal{U}(x,y) = \left(x, y, \frac{1}{c}(d-ax-ay)\right)$$

$$\mathcal{U}(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{c}(d-au-av)\right)$$

$$\mathcal{U}^{-1}(p^1,p^2,p^3) = (p^1,p^2)$$

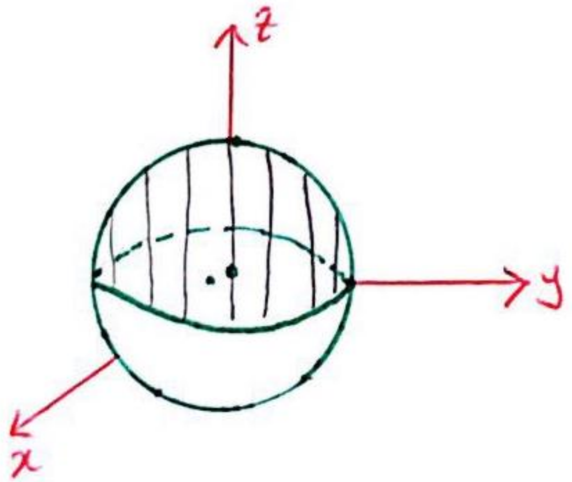
parametrizasyonuna sahiptir.

2)



$\varphi(u,v)=(u,v,3)$
parametrizasyonuna sahiptir.

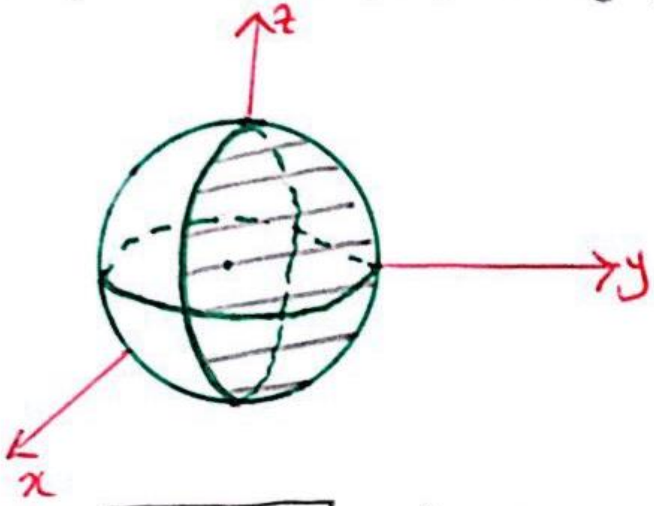
3) $x^2+y^2+z^2=1$ küresi için bir parametrizasyon,
$\varphi(u,v)=\left(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}\right)$ olup bu kürenin üst yarı küreyi verir.



$\mathscr{U}_1(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$ parametrizasyonu alt yarı küreyi verecektir.

Benzer şekilde,

$\mathscr{U}_2(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$ sağ yarı küreyi,



$\mathscr{U}_3(u,v) = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$ ise sol yarı küreyi verecektir.

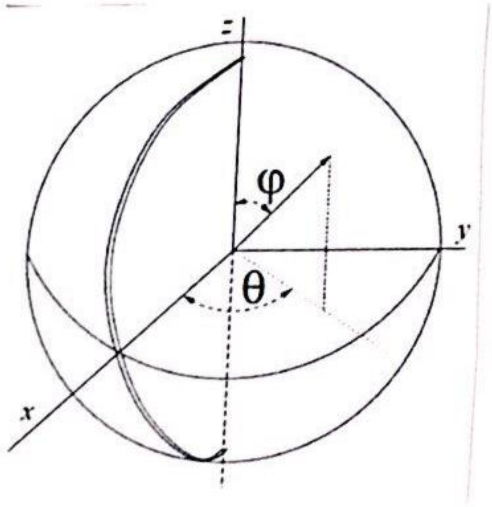
$\mathscr{U}_4(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$ ön yarı küreyi,

$\mathscr{U}_5(u,v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$ ise arka yarı küreyi verecektir.

4) $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ kümesinin bir regüler yüzey olduğunu yüzey yamalarını kullanarak gösterelim:

$\mathcal{U}_1 : (0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{U}_1(\theta,\phi) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi)$

yüzey yaması $y=0$, $x>0$ kümesi ile kürenin arakesiti olan yay dışındaki kürenin tüm noktalarını örter.

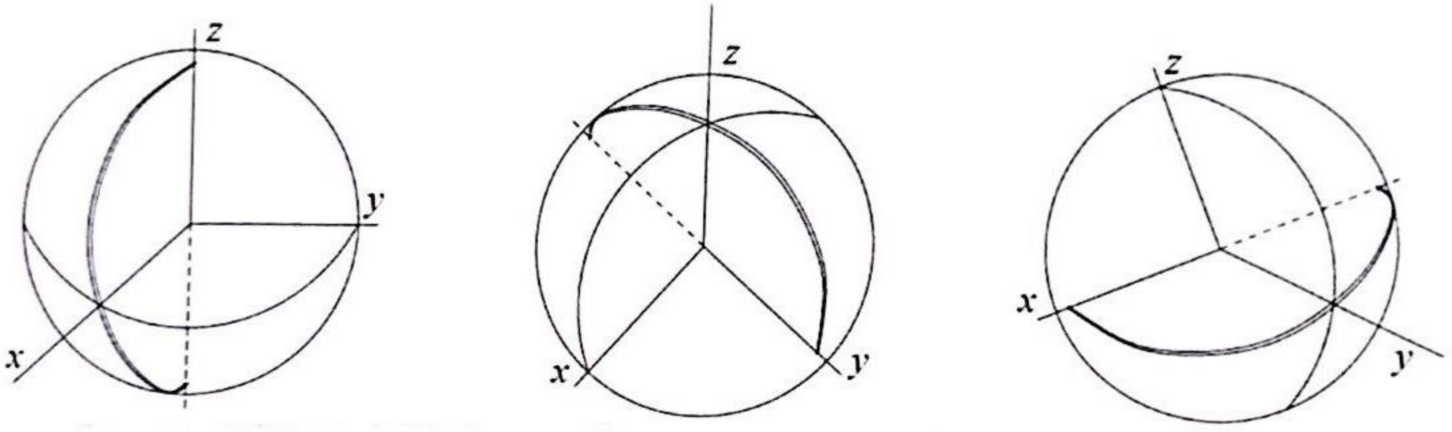


$\mathcal{U}_2 : (0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{U}_2(\theta,\phi) = (\sin\phi, \cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi)$

$\mathcal{U}_3 : (0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{U}_3(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\phi, \cos\theta\cos\phi)$

olarak alınırsa U_1 ve U_2 , (0,0,1) noktası dışında tüm S^2 yi örter.

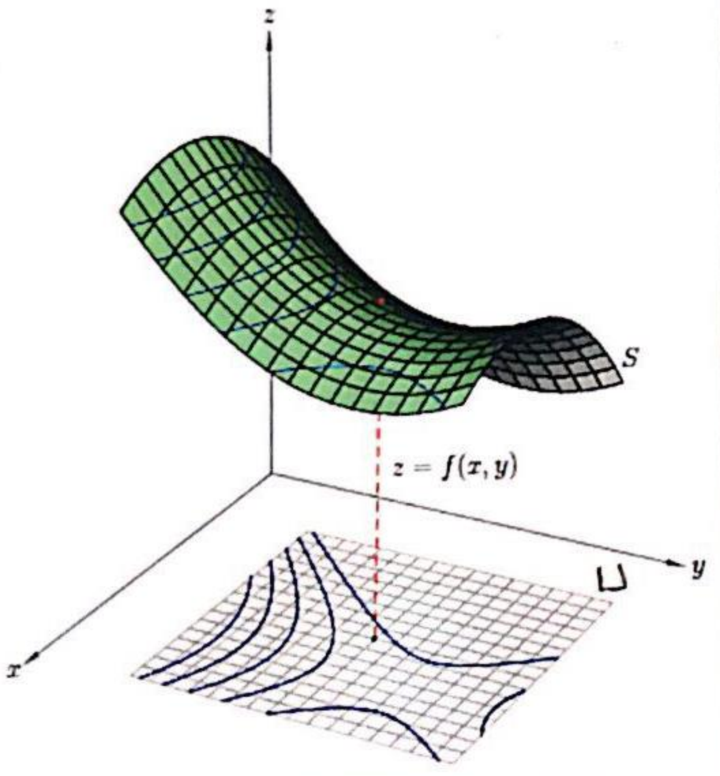
Bu noktayı da U_3 örtecektir.



U_1 U_2 U_3

Örnek: $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu dif.bilir olsun. f nin grafiği bir tek yüzey yaması ile örtülebilen bir regüler yüzeydir:

f nin grafiği $S = \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in U\}$ noktalarının kümesidir.



$\mathbb{X}: U \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{X}(u,v) = (u, v, f(u,v))$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\mathbb{X}$ tanımdaki 3 özelliği sağlar. Yani $\mathbb{X}$ bir yüzey yamasıdır:

1) S nin tanımından $\mathbb{X}$ örtendir.

$\forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U$ için

$(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ için $\mathbb{X}(u_1, v_1) \neq \mathbb{X}(u_2, v_2)$ olacağından $\mathbb{X}$ 1:1 dir. u, v ve $f(u,v)$ sürekli olduğundan $\mathbb{X}$ de süreklidir.

$\mathcal{U}^{-1}(u,v,f(u,v))=(u,v)$ olup u ve v sürekli olduğundan $\mathcal{U}^{-1}$ de sürekldir.

2) u,v ve f dif.bilir olduğundan $\mathcal{U}$ dif.bilirdir.

3) Hatırlatma (Ters Fonksiyon Teoremi): $\mathcal{U}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, herhangi bir $P\in\mathbb{R}^n$ noktasında $\mathcal{U}_*|_P$ birebir olacak şekilde bir dönüşüm olsun. Bu durumda $F:U\subset\mathbb{R}^n\to V\subset\mathbb{R}^m$ homeomorfizm olacak şekilde P nin bir U komşuluğu ve $F(P)$ nin bir V komşuluğu bulunabilir.

O halde $\mathcal{U}$ nin homeomorfizm olduğunu göstermek için $\mathcal{U}_*|_P$ türev dönüşümünün birebir olduğunu veya buna denk olan $\operatorname{rank} J(\mathcal{U},P)=2$ olduğunu göstermeliyiz:

$$J(\mathcal{U},P)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\f_u&f_v\end{bmatrix} \text{ olup } \operatorname{rank} J(\mathcal{U},P)=2 \text{ dir.}$$

O halde $\mathcal{U}$ bir yüzey yamasıdır. Yani S bir regüler yüzeydir.

Örnek: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bir dif.bilir fonksiyon olsun.

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0 \ , \ \vec{\nabla} F|_p \neq 0 \ , \ \forall p \in S \}$$ kümesi bir regüler yüzeydir:

Bu durum Ters Fonksiyon Teoreminin bir sonucudur.

$F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x,y)$ dir. O halde S bir f fonksiyonunun grafiği olup regüler yüzeydir.

Not: S yüzeyinin tamamı bir fonksiyonun grafiği olmayabilir.

Örneğin; $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1=0$ küre yüzeyi için;

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ nin grafiği üst yarı küreye karşılık gelir.

$z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ nin grafiği alt yarı küreye karşılık gelir.

$y = \sqrt{1-x^2-z^2}$ nin grafiği sağ yarı küreye karşılık gelir.

$y = -\sqrt{1-x^2-z^2}$ nin grafiği sol yarı küreye karşılık gelir.

$x = \sqrt{1-y^2-z^2}$ nin grafiği ön yarı küreye karşılık gelir.

$x = -\sqrt{1-y^2-z^2}$ nin grafiği arka yarı küreye karşılık gelir.

Örnek: Küre denkleminin bir yüzey belirttiğini yukarıdaki örneği kullanarak gösterelim:

$$S^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0 \}$$

denklemi 0 merkezli ve r yarıçaplı küre denklemidir.

$\forall P = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$ için $\vec{\nabla} F \big|_P = (2p_1, 2p_2, 2p_3) \neq 0$ olup S^2 yüzeydir.

Örnek: $M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2 \}$ konisi $\mathbb{R}^3$ de yüzey midir?

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ dır.

$\forall P = (p_1, p_2, p_3) \in M$ için $\vec{\nabla} F \big|_P = (2p_1, 2p_2, -2p_3)$ olup $P = (0,0,0) \in M$ için $\vec{\nabla} F \big|_P = 0$ olur. O halde M yüzey değil, fakat $M - \{(0,0,0)\}$ kümesi yüzeydir.

Yüzeyin Teğet Vektörü (Yüzey Üzerinde Tanjant Vektör)

M, $\mathbb{R}^3$ de bir yüzey ve $P \in M$ olsun. Eğer $\vec{V_p} \in T_{E^3}(P)$ için $\vec{V_p}$, P den geçen ve yüzey üzerinde yatan bir eğrinin teğet vektörü ise $\vec{V_p}$ ye M nin $P \in M$ deki teğet (tanjant) vektörü denir. $P \in M$ deki tüm teğet vektörlerin kümesi $T_M(P)$ dir.

Yüzey Normali

M yüzeyinin bir P noktasından geçen ve yüzey üzerinde yatan bütün eğrilerin P deki teğetlerine dik olan vektöre yüzeyin P noktasındaki normal vektörü denir.

E^3 de verilen M yüzeyini tanımlamada kullanılan fonksiyon f olsun. Yüzey denklemi bu durumda $f(x,y,z)=0$ olacaktır. Yüzeyin bir P noktasından geçen eğrinin denklemi, $\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))$ ile verilsin. $f(x(t),y(t),z(t))=0$ olacaktır. t ye göre türev alınırsa,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\nabla} f, \alpha'(t)\rangle = 0 \text{ bulunur.}$$

Sonuç: E^3 de f fonksiyonu yardımıyla tanımlanan M yüzeyinin $P \in M$ noktasındaki normal vektörü $\vec{\nabla} f|_P$ dir.

Yüzeyin Teğet Düzlemi

E^3 de bir M yüzeyi ve $P \in M$ noktası verilsin. $P \in M$ den geçen ve yüzeyin $P \in M$ deki normalini $(\vec{\nabla} f|_P)$ normal kabul eden düzleme yüzeyin P noktasındaki **teğet düzlemi** denir.

Örnek:

$f(x,y,z) = x^2yz - y + z - 5 = 0$ denklemi ile verilen yüzeyin $P(1,1,3)$ noktasındaki normal vektörünü ve teğet düzleminin denklemini bulalım:

$$\vec{\nabla} f|_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_P, \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_P \right)$$

$$= \left(2xyz|_P, (x^2z-1)|_P, (x^2y+1)|_P \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f|_p = (6,2,2) \quad \text{olur.}$$

Yüzeyin normali teğet düzlemin normali olacağından teğet düzlemin denklemi

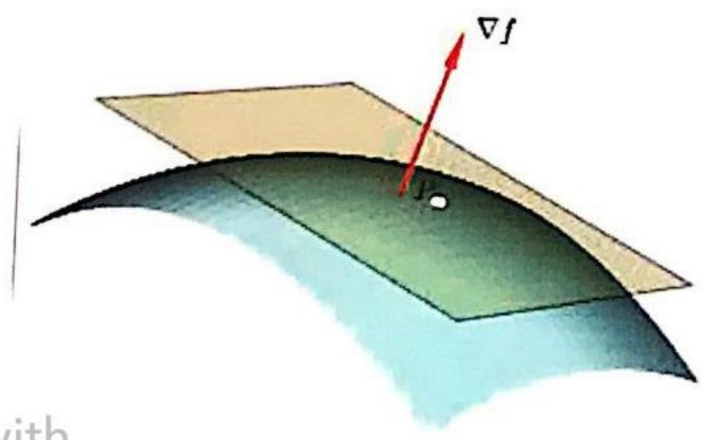
$$6x+2y+2z+d=0$$

dır. Düzlem $P(1,1,3)$ den geçeceğinden,

$$6+2+6+d=0$$

$$\Rightarrow d=-14$$

$$\Rightarrow 3x+y+z-7=0$$



Yüzey normali ve teğet düzlem

Teğet düzlem, $p \in M$ deki tüm teğet (tanjant) vektörlerin kümesidir. Yani $T_M(p)$ dir.

Not: $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(u,v) \to \varphi(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$ dif.bilir dönüşümünün

jakobien matrisi

$$[\varphi_*] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix}$$

dir. Bu matrisin rankının 2 olması demek, sütun vektörlerinden oluşan

$$\Big\{\underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u}\right)}_{\varphi_u}, \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v}\right)}_{\varphi_v}\Big\}$$

kümesinin yani $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ nin lineer bağımsız olması demektir. O halde $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^3$ ün yüzey olması için gerek ve yeter şart, $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ kümesinin lineer bağımsız olmasıdır.

Örnek:

$z = xy$ denklemiyle verilen $\mathbb{R}^3$ ün alt kümesinin yüzey olduğunu gösterelim:

$z = xy$ denklemini $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(u,v) \to \varphi(u,v) = (u, v, uv)$

şeklinde parametrelendirelim.

$\varphi_u = (1,0,v)$, $\varphi_v = (0,1,u)$ olup $\{\phi_u, \phi_v\}$ lineer bağımsızdır.

O halde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ de yüzeydir.

Örnek:

$z^2 = x^2 + y^2$ denklemiyle verilen $\mathbb{R}^3$ ün alt kümesinin yüzey olup olmadığını araştıralım:

$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2=x^2+y^2\}$ dir. S için bir parametrizasyon

$\varphi(u,v)=(u,v,\mp\sqrt{u^2+v^2})$ şeklindedir.

$f_1(u,v)=u$, $f_2(u,v)=v$, $f_3(u,v)=\mp\sqrt{u^2+v^2}$ olup $\frac{\partial f_3}{\partial u}=\mp\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$,

$\frac{\partial f_3}{\partial v}=\mp\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$ dir. $u=v=0$ için φ dif.bilir olmadığından

S yüzey değildir. Fakat $S-\{(0,0,0)\}$ kümesi yüzeydir.

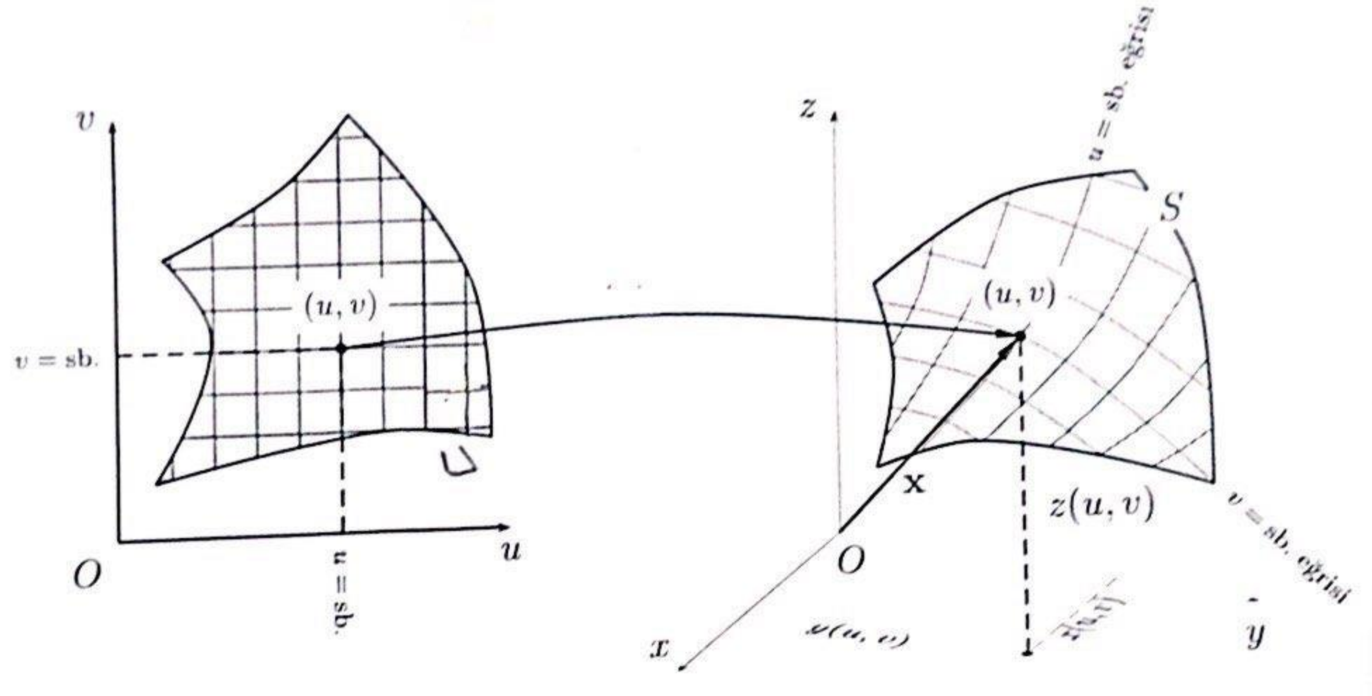
Parametre Eğrileri

$\varphi: U\subset E^2 \to E^3$ parametrizasyonu ile verilen yüzeyi

$(u,v)\to \varphi(u,v)$ alalım.

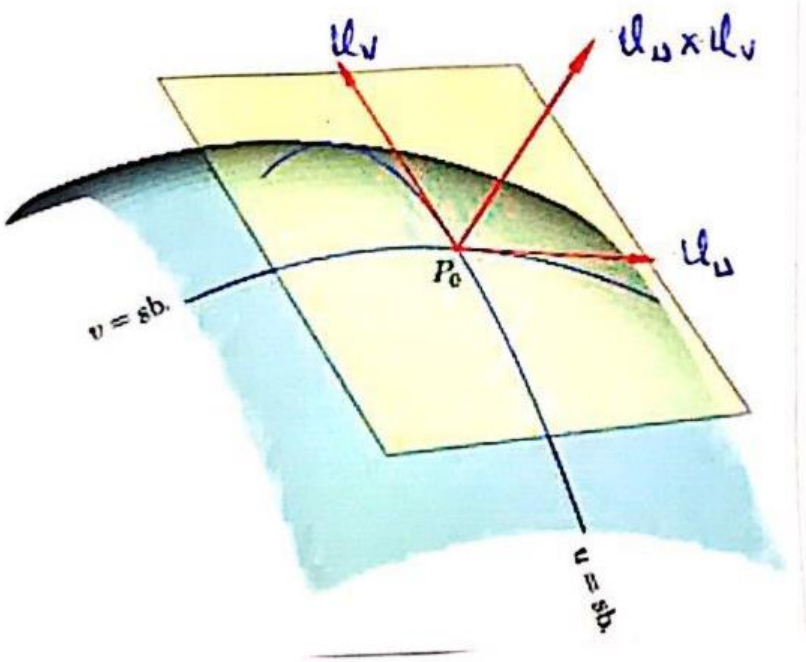
* $u=u_0=$sabit için $\varphi(u_0,v)$ noktalarının oluşturduğu $\varphi(u_0,v)=\beta(v)$ eğrisi yüzey üzerinde v-parametresine bağlı bir eğridir.
* $v=v_0=$sabit için $\varphi(u,v_0)$ noktalarının oluşturduğu $\varphi(u,v_0)=\alpha(u)$ eğrisi yüzey üzerinde u-parametresine bağlı bir eğridir.

$\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ eğrilerine yüzeyin parametre eğrileri denir.



U düzlem bölgesinin *S* yüzey parçasına izdüşümü

U bölgesindeki bir nokta u=sb. ve v=sb. doğrularının kesişimi iken bu noktanın S deki karşılığı u=sb. ve v=sb. eğrilerinin kesişimi ile belirlidir.



$\mathcal{U} = \mathcal{U}(u,v)$ ile verilen yüzeyin normal vektörü $\mathcal{U}_u \times \mathcal{U}_v$ olarak alınabilir. Birim normal vektörü ise $\vec{n} = \dfrac{\mathcal{U}_u \times \mathcal{U}_v}{\|\mathcal{U}_u \times \mathcal{U}_v\|}$ dir.

Örnek:

$\varphi(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ yüzeyinin birim normal vektörünü bulunuz.

Çözüm:

$\varphi_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$, $\varphi_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin u \cos v & -\sin u \sin v & \cos u \\ -\cos u \sin v & \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-\cos^2 u \cos v, -\cos^2 u \sin v, -\sin u \cos u)$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = |\cos u| \sqrt{\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u} = |\cos u| \text{ olup}$$

$\vec{n} = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ alınabilir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 2