ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Grup Homomorfizmaları

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 18

Teorem 3.6.15 $f: G \longrightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun. $\text{Çek} f = N$ olmak üzere $G/_N \cong f(G)$ dir. (Homomorfizma teo.)

İspat:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & H \\ G/_N \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\forall xN \in G/_N$ için $\bar{f}(xN) = f(x)$ ile $\bar{f}: G/_N \longrightarrow f(G)$ dönüşümünü tanımlayalım. $xN = yN \Longrightarrow xy^{-1} \in N$ ve
$f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e_H$ olup $f(x) = f(y)$ dir.
$\forall x, y \in G$ için $\bar{f}(xN\, yN) = \bar{f}(xyN) = f(xy) = f(x)f(y)$ den $\bar{f}(xN\, yN) = \bar{f}(xN)\bar{f}(yN)$ olup $\bar{f}$ homomorfizmadır.
$\bar{f}(xN) = \bar{f}(yN) \Longrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(x)f(y)^{-1} = f(xy^{-1}) = e_H$
$\Longrightarrow xy^{-1} \in N \Longrightarrow xN = yN$ olup $\bar{f}$ 1-1 dir
$f(G)$ nin her elemanı $a \in G$ olmak üzere $f(a)$ şeklinde olduğundan $\bar{f}(aN) = f(a)$ olacak şekilde $aN \in G/_N$ vardır. O halde $G/_N \cong f(G)$ bulunur.

Teorem 3.6.16 (1. izomorfizma Teoremi) $f: G \longrightarrow \overline{G}$ epimorfizma $\text{Çek} f = K$, $\overline{N} \trianglelefteq \overline{G}$ ve $N = f^{-1}(\overline{N})$ olsun. Bu taktirde $G/N \cong \overline{G}/\overline{N} \cong (G/K)/(N/K)$ dır.

İspat: $\forall g \in G$ için $\psi(g) = f(g)\overline{N}$ ile $\psi: G \longrightarrow \overline{G}/\overline{N}$ dönüşümünü tanımlayalım. f örten olduğundan $\forall \bar{g} \in \overline{G}$ için $f(g) = \bar{g}$ olacak şekilde $\exists g \in G$ vardır. Şu halde $\bar{g}\overline{N} = f(g)\overline{N} = \psi(g)$ olup ψ örtendir.
$\forall a, b \in G$ için

$$\psi(ab) = f(ab)\overline{N} = f(a)f(b)\overline{N}$$
$$= (f(a)\overline{N})(f(b)\overline{N}) = \psi(a)\psi(b)$$

ψ homomorfizmadır. $\text{Çek}\psi$ yi bulalım. $a \in G$ için $a \in \text{Çek}\psi \iff \psi(a) = f(a)\overline{N} = \overline{N}$ buda $f(a) \in \overline{N}$ olması ile aynı şey olup $N = f^{-1}(\overline{N})$ olduğundan $f(a) \in \overline{N}$ $\iff a \in N$ olup $\text{Çek}\psi = N$ bulunur.

Homomorfizma teoreminden $G/_N \cong \overline{G}/_{\overline{N}}$ bulunur.
Burada $\overline{G} = G/K$ ve $\overline{N} = N/K$ olduğundan
aynı teorem gereği istenen elde edilir.

Teorem 3.6.17 (2. İzomorfizma Teoremi) G bir grup $H \leq G$ ve $K \lhd G$ olsun. Bu taktirde $HK = KH \leq G$ ve $H \cap K \lhd H$ olup $HK/_K \cong H/_{H\cap K}$ dır.

İspat: $K \lhd G$ olduğundan $\forall h \in H$ için $hK = Kh$ dır.
$HK = \cup hK = \cup Kh = KH$ olup $HK = KH \leq G$ bulunur.
$K \subset HK \subset G$ olduğundan $K \lhd HK$ aşikar. O halde $HK/_K$ tanımlıdır. $H \cap K \lhd H$ aşikar, buradan $H/_{H \cap K}$ da tanımlıdır. $\forall h \in H$ için $\psi(h) = hK$ ile $\psi : H \longrightarrow HK/_K$ fonksiyonunu tanımlayalım.
ψ örtendir. Çünkü $hk \in HK$ için $(hk)K = hK = \psi(h)$ dır.

$\forall h_1, h_2 \in H$ için $\psi(h_1h_2) = (h_1h_2)K = (h_1K)(h_2K) = \psi(h_1)\psi(h_2)$

Bir $h \in H$ için

$h \in \text{Çek}\,\psi \iff \psi(h) = hK = K \iff h \in H \cap K$ olduğundan

$\text{Çek}\,\psi = H \cap K$ dır. Homomorfizma teoreminden

$H/_{H\cap K} \cong HK/_K$ bulunur.

Teorem 3.6.18 (Cayley) Her grup bir dönüsüm grubuna izomorftur.

İspat: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için $T_a(x) = ax$ ile $T_a : G \longrightarrow G$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$T_a(x) = T_a(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow x = y$ (kısaltma öz.)

T_a 1-1 dir. $\forall y \in G$ için $T_a(x) = ax = y$ olacak sekilde $\exists x \in G$ bulunur. T_a örtendir.

O halde $T_a \in S(G)$ dir.

Simdi $\forall a \in G$ için $\psi(a) = T_a$ ile $\psi : G \longrightarrow S(G)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$\forall a, b, x \in G$ için $T_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = a\,T_b(x) = T_a T_b(x)$

$= (T_a \circ T_b)(x)$ olup $T_{ab} = T_a \circ T_b$

yani $\psi(ab) = \psi(a) \circ \psi(b)$ dir. ψ homomorfizmadır.

$a, b \in G$ için $\psi(a) = \psi(b) \Rightarrow T_a = T_b \Rightarrow T_a(e) = T_b(e) \Rightarrow a = b$
dolayısıyla ψ 1-1 dir.

Şu halde $G \cong \psi(G) \leq S(G)$ dir.

Sonuç 3.6.19 G n. mertebeden bir grup ise $S(G) = S_n$ olduğundan G grubu S_n'nin altgrubuna izomorftur.

Örnek 3.6.20 Cayley Teoremini kullanarak $\mathbb{Z}_4$ grubuna izomorf dönüşüm grubunu bulalım.

$T_a : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ $\quad T_a(x) = a + x$ $\quad T_a \in S_4$ $\quad \psi : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow S_4$
$\psi(a) = T_a$ ile tanımlanırsa ψ bir 1-1 homomorfizmadır.

$\psi(\bar{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \psi(\bar{1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \psi(\bar{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\psi(\bar{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{Z}_4 \cong \psi(\mathbb{Z}_4) \leq S_4$ altgrubu
$\{\psi(\bar{0}), \psi(\bar{1}), \psi(\bar{2}), \psi(\bar{3})\}$ olarak alınabilir.

TEŞEKKÜRLER…