ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Grup Homomorfizmaları

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 17

3.6. Grup Homomorfizmaları

Tanım 3.6.1 $(G,\circ)$ ve $(H,*)$ iki grup $f: G \longrightarrow H$ bir fonksiyon olsun. $\forall a,b \in G$ için $f(a\circ b) = f(a) * f(b)$ ise f ye G den H ya bir grup homomorfizması denir.

Örnek 3.6.2 $f: G \longrightarrow H$, $\forall a \in G$ için $f(a) = e_H$ ise f bir grup homomorfizmasıdır. Buna aşikar homomorfizma denir.

Örnek 3.6.3 $\forall a \in \mathbb{Z}$ için $f(a) = \bar{a}$ ile tanımlı $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ bir grup homomorfizmasıdır.

Örnek 3.6.4 $f:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(\mathbb{R},+)$, $f(x)=x^2$ fonksiyonu grup homomorfizması değildir.

Örnek 3.6.5 $f:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(\mathbb{R}^*,\cdot)$ $f(x)=2^x$ ile tanımlı f fonksiyonu homomorfizmadır.

Teorem 3.6.6 $f: G \longrightarrow H$ bir homomorfizma olsun.

i) $f(e_G) = e_H$ ve

ii) $\forall a \in G$ için, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ dir.

İspat: i) $a \in G$ olsun. $f(a) = f(ae_G) = f(e_G a)$ ve

$f(a) = f(a)f(e_G) = f(e_G)f(a)$ olup $f(e_G) = e_H$ bulunur.

ii) $\forall a \in G$ için $aa^{-1} = a^{-1}a = e_G$ ve

$f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1}) = f(e_G) = e_H$ olup $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ bulunur.

Teorem 3.6.7 $f: G \longrightarrow H$ bir homomorfizma olsun.

i) $K \leq G$ ise $f(K) \leq H$ dir.

ii) $N \leq H$ ise $f^{-1}(N) \leq G$ dir.

İspat: i) $K \leq G$ olsun. $f(K) = \{f(a) \in H \mid a \in K\}$

$e_H = f(e_G)$ ve $e_G \in K$ olduğundan $f(K) \neq \emptyset$ dir.

$a, b \in K$ olmak üzere $f(a), f(b) \in f(K)$ olsun.

$f(a)f(b)^{-1} = f(ab^{-1})$ bulunur. Dolayısıyla $f(a)f(b)^{-1} \in f(N)$ dir.

ii) $N \leq H$ olsun. $f^{-1}(N)=\{a\in G \mid f(a)\in N\}$ dir.
$a,b\in f^{-1}(N)$ için $f(a), f(b)\in N$ ve $N\leq H$ olduğundan
$f(a)f(b)^{-1}=f(a)f(b^{-1})=f(ab^{-1})\in N \Rightarrow ab^{-1}\in f^{-1}(N)$ olup
$f^{-1}(N)\leq G$ bulunur.

Teorem 3.6.8 $f: G\longrightarrow H$ bir homomorfizma olsun.
i) f örten ise $K\triangleleft G$ için $f(K)\triangleleft H$ dır.
ii) $N\triangleleft H$ ise $f^{-1}(N)\triangleleft G$ dir.

İspat: i) $K\triangleleft G$ olsun. $K\leq G$ dir. (Teorem 3.6.7 i)
$\forall h\in H$ ve $\forall f(a)\in f(K)$ alalım. f örten olduğundan
$h=f(g)$ olacak şekilde $\exists g\in G$ var ve
$hf(a)h^{-1}=f(g)f(a)f(g)^{-1}=f(g)f(a)f(g^{-1})=f(gag^{-1})$
olur. $K\triangleleft G$ olduğundan $gag^{-1}\in K$ ve
$hf(a)h^{-1}\in f(K)$ olup $f(K)\triangleleft H$ bulunur.

ii) $N \triangleleft H$ olsun. $f^{-1}(N) \leq G$ dir (Teorem 3.6.7 ii)

$\forall g \in G$ ve $\forall b \in f^{-1}(N)$ için

$f(gbg^{-1}) = f(g)f(b)f(g^{-1}) = f(g)f(b)f(g)^{-1}$

$f(b) \in N$, $N \triangleleft H$ olduğundan

$f(gbg^{-1}) \in N$ yani $gbg^{-1} \in f^{-1}(N)$ bulunur.

Tanım 3.6.9 $f: G \longrightarrow H$ homomorfizma olsun.

$f^{-1}(e_H) = \{a \in G \mid f(a) = e_H\}$ kümesine f homomorfizmasının çekirdeği denir ve $\text{Çek} f$ ile gösterilir.

Teorem 3.6.10 $f : G \longrightarrow H$ homomorfizmasının 1-1 olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{Çek} f = \{e_G\}$ olmasıdır.

İspat: f 1-1 olsun. $a \in \mathrm{Çek} f \Rightarrow f(a) = e_H = f(e_G) \Rightarrow$ $a = e_G$ bulunur.

$\mathrm{Çek} f = \{e_G\}$ olsun $a, b \in G$ için $f(a) = f(b) \Rightarrow$ $f(a) f(b)^{-1} = e_H = f(a) f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) \Rightarrow ab^{-1} \in \mathrm{Çek} f \Rightarrow$ $ab^{-1} = e_G \Rightarrow a = b$ bulunur.

Tanım 3.6.11 $f : G \longrightarrow H$ bir homomorfizma olsun. f örtense epimorfizma, f 1-1 ise monomorfizma, f hem 1-1 hemde örtense izomorfizma olarak adlandırılır. G ve H arasında izomorfizma varsa bu gruplara izomorf gruplar denir ve $G \cong H$ yazılır.

Teorem 3.6.12 n. mertebeden bütün devirli gruplar $(\mathbb{Z}_n, +)$ grubuna ve sonsuz mertebeli bütün devirli gruplar $(\mathbb{Z}, +)$ grubuna izomorftur.

İspat: $G = \langle a \rangle$ n. mertebeden devirli grup olsun. $\forall a^i \in G$ için $f(a^i) = \bar{i}$ ile $f : G \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ dönüşümünü tanımlayalım. $\forall a^i, a^j \in G$ için

$a^i = a^j \Leftrightarrow a^{i-j} = e_G \Leftrightarrow n | i-j \Leftrightarrow \bar{i} = \bar{j} \Leftrightarrow f(a^i) = f(a^j)$

olup f iyi tanımlı ve 1-1 bir fonksiyondur.

$\forall a^i, a^j \in G$ için $f(a^i a^j) = f(a^{i+j}) = \overline{i+j} = \bar{i} +_n \bar{j}$

$= f(a^i) +_n f(a^j)$ olup f homomorfizmadır.

$|\mathbb{Z}_n| = |G|$ olup f örtendir. $\mathbb{Z}_n \cong G$ bulunur.

Benzer şekilde $\forall a^i \in G$ sonsuz devirli grubu için $f(a^i) = i$ ile $f: G \longrightarrow \mathbb{Z}$ dönüşümünü tanımlayalım. $\forall a^i, a^j \in G$ için $a^i = a^j \Leftrightarrow a^{i-j} = e_G \Leftrightarrow i - j = 0$ $\Leftrightarrow i = j \Rightarrow f$ 1-1 bir fonksiyondur. f tanımdan örtendir. Dolayısıyla f izomorfizma olup $G \cong \mathbb{Z}$ bulunur.

Teorem 3.6.13 G bir grup ve $N \triangleleft G$ ise $\forall x \in G$ için $\varphi(x) = xN$ ile tanımlı $\varphi : G \longrightarrow G/N$ bir epimorfizmadır ve $\text{Çek}\,\varphi = N$ dir.

İspat: $\forall x \in G$ elemanının $N \triangleleft G$ ye göre sol denklik sınıfı teklikle belirli olduğundan $\varphi : G \longrightarrow G/N$ bir fonksiyon ve G/N deki her sınıf boştan farklı olması sebebiyle $\exists x \in G$ olacağından φ örtendir. $\forall x, y \in G$ için

$$\varphi(x \cdot y) = (xy)N = (xN)(yN) = \varphi(x)\varphi(y)$$

ve $x \in \text{Çek}\,\varphi \Longleftrightarrow \varphi(x) = xN = N \Longleftrightarrow x \in N$ olup $\text{Çek}\,\varphi = N$ bulunur.

Problem 3.6.14 $f: G \longrightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun. $\mathrm{Çek} f \lhd G$ dir.

TEŞEKKÜRLER…