1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Sıralama Bağıntısı

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 6

2

$\therefore \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

Tanım: A boştan farklı bir küme, β A kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. β bağıntısının yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri varsa β ya bir sıralama (kısmi sıralama) bağıntısı denir.

A kümesi üzerinde bir sıralama bağıntısı varsa A kümesine sıralı küme (kısmi sıralı küme) denir.

Örnek: $\mathbb{Z}$ kümesinde, $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için

$$a \beta b \iff a \leq b$$

biçiminde tanımlanan β, bir sıralama bağıntısıdır.

Örnek: $\mathbb{Z}^*$ kümesinde, $\forall x,y \in \mathbb{Z}^*$ için

$$x \beta y \iff x | y$$

biçiminde tanımlanan β, bir sıralama bağıntısı değildir.

Ters simetri özelliğini sağlamaz.

$-3|3$, $3|-3$ iken $3 \neq -3$

olduğu için ters simetri değildir.

Eğer $\mathbb{N}$ de tanımlamış olsaydık $x \, \mathcal{S} \, y \Leftrightarrow x|y$ bir sıralama bağıntısı olurdu.

Örnek: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için

$$(a,b) \, \mathcal{S} \, (c,d) \Longleftrightarrow a \leq c \text{ ve } b = d$$

biçiminde tanımlanan $\mathcal{S}$ bir sıralama bağıntısı mıdır? Gösteriniz.

* Yansıma özelliği

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için $(a,b) \, \mathcal{S} \, (a,b)$?

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için $a \leq a$, $b = b$ olduğundan $(a,b) \, \mathcal{S} \, (a,b)$ dir.

$\therefore$ $\mathcal{S}$ yansıyandır.

* Ters simetri özelliği

$(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için

$(a,b) \, \mathcal{S} \, (c,d)$ ve $(c,d) \, \mathcal{S} \, (a,b) \Longrightarrow (a,b) = (c,d)$?

$$\left.\begin{array}{l} (a,b) \, \mathcal{S} \, (c,d) \Longrightarrow a \leq c, \ b = d \\ (c,d) \, \mathcal{S} \, (a,b) \Longrightarrow c \leq a, \ d = b \end{array}\right\} \Rightarrow a = c, \ b = d$$

$$\Rightarrow (a,b) = (c,d)$$

$\therefore$ $\mathcal{S}$ ters simetriktir.

* Geçişme özelliği

$(a,b), (c,d), (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için

$(a,b) \, \mathcal{S} \, (c,d)$ ve $(c,d) \, \mathcal{S} \, (m,n) \Longrightarrow (a,b) \, \mathcal{S} \, (m,n)$?

$$\left.\begin{array}{l} (a,b) \, \mathcal{S} \, (c,d) \Longrightarrow a \leq c, \ b = d \\ (c,d) \, \mathcal{S} \, (m,n) \Longrightarrow c \leq m, \ d = n \end{array}\right\} \Rightarrow a \leq m, \ b = n$$

$\Rightarrow (a,b)\ \mathcal{S}\ (m,n)$

$\therefore\ \mathcal{S}$ geçişmelidir.

$\therefore\ \mathcal{S}$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ üzerinde bir sıralama bağıntısıdır.

Tanım: $(A,\leq)$ sıralı küme olsun. $x,y\in A$ olmak üzere $x\leq y$ ya da $y\leq x$ ise x ve y elemanlarına $\leq$ bağıntısına göre karşılaştırılabilir elemanlar denir.

Tanım: $(A,\leq)$ sıralı bir küme olsun. A kümesinin her eleman çifti (her iki elemanı) $\leq$ bağıntısına göre karşılaştırılabiliyorsa (kıyaslanabiliyorsa), A kümesine tam sıralı küme denir.

($\forall x,y\in A$ için $x<y$, $x=y$, $x>y$ durumlarından yalnızca biri geçerlidir.)

Örnek: $A=\{1,2\}$ olmak üzere $(P(A),\leq)$ bir sıralı kümedir. Yani $\subseteq$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

$$P(A)=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}=A\}$$

$\{1\}\subseteq\{1,2\}$ olduğundan $\{1\}$ ve $\{1,2\}$ elemanları bu bağıntıya göre karşılaştırılabilir elemanlardır.

$\{1\}\nsubseteq\{2\}$, $\{2\}\nsubseteq\{1\}$ olduğundan $\{1\}$ ve $\{2\}$ elemanları bu bağıntıya göre karşılaştırılamaz. Bu nedenle $P(A)$ kümesi $\subseteq$ bağıntısına göre sıralı bir kümedir ama tam sıralı bir küme değildir.

Tanım: $(A,\leq)$ sıralı küme olsun.

i) $a\in A$ olmak üzere, A nın a dan kesinlikle büyük hiç bir elemanı yoksa, yani;

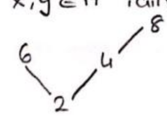
7

$$\forall x\in A,\quad a\le x \Longrightarrow x=a$$

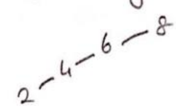
ise a elemanına, A nın bir büyük elemanı veya bir maximal elemanı denir.

ii) $\exists a\in A \ni \forall y\in A$ için $y\le a$ oluyorsa, a, A kümesinin en büyük elemanıdır. Yani; a, A kümesindeki her elemandan büyükse a ya en büyük eleman denir.

Örnek: $A=\{2,4,6,8\}$, $\forall x,y\in A$ için

$xNy \Leftrightarrow x\,|\,y$ için  olup

en büyük eleman yoktur. 6 ve 8 büyük elemandır.

$xNy \Leftrightarrow x\le y$ için  olup

en büyük eleman 8 dir.

8

iii) $b\in A$ olmak üzere, A nın b den kesinlikle küçük hiç bir eleman yoksa, yani;

$$\forall x\in A,\quad x\le b \Longrightarrow x=b$$

ise b elemanına, A nın bir küçük elemanı veya bir minimal elemanı denir.

iv) $\exists b\in A \ni \forall y\in A$ için $b\le y$ oluyorsa, b, A kümesinin en küçük elemanıdır. Yani; b, A kümesindeki her elemandan küçükse b ye en küçük eleman denir.

NOT: Tanımdan A nın en büyük elemanı (en küçük elemanı) varsa tek olacağı açıktır.

Tanım: $(A,\le)$ sıralı küme, $B\subseteq A$ olsun.

i) $\exists a \in A \ni \forall b \in B$ için $b \leq a$ oluyorsa a elemanına B kümesinin bir <u>üst sınırı</u> denir.

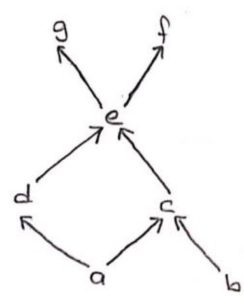
Eğer varsa B kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne B kümesinin <u>en küçük üst sınırı</u> (eküs) veya <u>supremumu</u> denir ve $\operatorname{Sup} B$ ile gösterilir.

ii) $\exists a_1 \in A \ni \forall b_1 \in B$ için $a_1 \leq b_1$ oluyorsa a_1 elemanına B kümesinin bir <u>alt sınırı</u> denir.

Eğer varsa B kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne B kümesinin <u>en büyük alt sınırı</u> (ebas) veya <u>infumumu</u> denir ve $\operatorname{Inf} B$ ile gösterilir.

B kümesinin bir üst sınırı varsa B ye <u>üstten sınırlı</u>; bir alt sınırı varsa <u>alttan sınırlı</u>, hem üst hem de alt sınırı varsa <u>sınırlı</u> alt küme denir.

Örnek: $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
$B = \{c, d, e\}$



A nın minimal elemanı : $\{a, b\}$
A nın maximal elemanı : $\{g, f\}$
B nin alt sınırı : $\{a\}$
B nin üst sınırı : $\{g, e, f\}$

En büyük eleman yok
En küçük eleman yok
$\operatorname{Sup} B = \{e\}$
$\operatorname{Inf} B = \{a\}$

11

Teorem: Sıralı bir kümede aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.
i) Boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin bir supremumu vardır.
ii) Boş olmayan ve alttan sınırlı her alt kümesinin bir infumumu vardır.

Tanım: Sıralı bir kümenin boş olmayan her alt kümesinin en küçük elemanı varsa bu kümeye <u>iyi sıralı küme</u> denir.

Zorn Lemma: Boş olmayan ve her zincirinin bir üst sınırı olan sıralı bir kümenin bir maksimal elemanı vardır.

12

Örnek: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi üzerinde bilinen $\leq$ sıralama bağıntısı ve $A=\{x\in\mathbb{Q} : x^3<3\}$ alt kümesi veriliyor.
i) A kümesi üstten sınırlı mı?

ii) A kümesi alttan sınırlı mı?

i) $A=\{x\in\mathbb{Q} : x < \sqrt[3]{3}\}=(-\infty, \sqrt[3]{3})$

$\sqrt[3]{3}$ den büyük olan her rasyonel sayı A nın bir üst sınırıdır. A nın üst sınırları kümesi : $(\sqrt[3]{3}, \infty)$
$\therefore$ A kümesi üstten sınırlıdır.

ii) $\forall a\in\mathbb{Q}$ için $\exists\, x\in A \ni a \nleq x$ olduğundan A nın bir alt sınırı yoktur.

$\therefore$ A kümesi alttan sınırlı değildir.

13

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik

Sıralama Bağıntısı

Ders 6

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ