ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Normal Alt Gruplar

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 15

3.5 Normal Alt Gruplar

Tanım 3.5.1 G bir grup ve $H \leq G$ olsun. G de $\equiv$ bağıntısını, $a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ ile tanımlayalım.

Teorem 3.5.2 $H \leq G$ alt grubuna göre yukarıda tanımlanan $\equiv$ bağıntısı G üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Bu denklik bağıntısına göre $a \in G$ nin denklik sınıfı $\bar{a} = Ha = \{ha \mid h \in H\}$ alt kümesidir. Ha ya H alt grubuna göre a nın sağ denklik sınıfı denir.

Teorem 3.5.3 G bir grup $H \leq G$ olsun. $a \equiv b \pmod{H} \Longleftrightarrow a^{-1}b \in H$ ile tanımlı $\equiv$ bağıntısı G de bir denklik bağıntısıdır. $a \in G$ nin denklik sınıfı $\bar{a} = aH = \{ah \mid h \in H\}$ alt kümesidir. aH ya H alt grubuna göre a nın sol denklik sınıfı denir.

Örnek 3.5.6 S_3 simetrik grubu için $H=\{e,(123),(132)\}$ ve $H'=\{e,(23)\}$ alt grupları alalım.

H nın S_3 deki sol ve sağ kalan sınıflarını bulalım.

$eH=(123)H=(132)H=H$ ve $He=H(123)=H(132)=H$

$(23)H=(13)H=(12)H=\{(23),(12),(13)\}$

$H(23)=H(13)=H(12)=\{(23),(12),(13)\}$ Buradan

$\forall a\in S_3$ için $aH=Ha$ dır.

$eH'=(23)H'=H'$ ve $H'e=H'(23)=H'$

$(13)H'=(132)H'=\{(13),(132)\}$ ve $(12)H'=(123)H'=\{(12),(123)\}$

$H'(13)=H'(123)=\{(12),(123)\}$ ve $H'(12)=H'(132)=\{(12),(132)\}$

olup $(132)H'\neq H'(132)$ bulunur.

Teorem 3.5.8 G bir grup, $H \leq G$ ve $a, b \in G$ olsun.

i) $aH = bH \iff b^{-1}a \in H$

ii) $Ha = Hb \iff ab^{-1} \in H$ dır.

İspat: i) $aH = bH$ olsun. $a = a.e \in aH$, $a = bh'$, $\exists h' \in H$ var.

$a = bh' \Rightarrow b^{-1}a = h' \in H$ bulunur.

Tersine $b^{-1}a \in H \Rightarrow b^{-1}a = h$, $\exists h \in H$, $a = bh \Rightarrow ah' \in aH \Rightarrow$

$ah' = bhh' \in bH$ olup $aH \subset bH$ bulunur.

$b^{-1}a = h' \Rightarrow b = ah'^{-1}$ bulunur.

$bh'' = ah'^{-1}h'' \in aH$ olup $bH \subset aH$ bulunur.

ii) i şıkkının benzeri şekilde yapılır.

Teorem 3.5.9 G bir grup, $H \leq G$ olsun $\forall a,b \in G$ için
$aH = bH$ veya $aH \cap bH = \emptyset$ dır.

İspat: $a,b \in G$ için $aH \cap bH \neq \emptyset$ olsun. Bu taktirde
$\exists c \in aH \cap bH$, $c \in aH \wedge c \in bH \Rightarrow c = ah_1$, $c = bh_2$, $\exists h_1, h_2 \in H$
$ah_1 = bh_2 \Rightarrow b^{-1}a \in H$ olup $aH = bH$ bulunur.

Sonuç 3.5.10 G bir grup $H \leq G$ olsun. $\{aH\}_{a \in G}$ ailesi
Gnin bir ayrışımını verir.

Teorem 3.5.11 G bir grup, $H \leq G$ olsun. H nın elemanlarıyla H nın G içindeki sol(sağ) kalan sınıfları arasında birebir eşleme vardır.

İspat: $a \in G$ ve aH, H nın G içindeki bir sol kalan sınıfı olsun. $\forall h \in H$ için $f(h) = ah$ ile tanımlı $f : H \longrightarrow aH$ dönüşümünü tanımlayalım.
$\forall h_1, h_2 \in H$ için $h_1 = h_2 \Leftrightarrow ah_1 = ah_2$ olup f iyi tanımlı ve birebirdir. $\forall ah \in aH$ için $f(h) = ah$ olacak şekilde $h \in H$ vardır. f örtendir. Benzer işlemler sağ kalan sınıfı içinde yapılabilir.

Sonuç 3.5.12 G bir grup, $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için $|aH| = |H| = |Ha|$ dır.

Teorem 3.5.13 G bir grup, $H \leq G$ olsun. H nın G içindeki tüm sol kalan sınıfları kümesi ile tüm sağ kalan sınıfları kümesi arasında bire bir eşleme vardır.

İspat: $L = \{aH \mid a \in G\}$, $R = \{Ha \mid a \in G\}$ olsun.

$\forall aH \in L$ için $f(aH) = Ha^{-1}$ ile $f : L \longrightarrow R$ dönüşümünü tanımlayalım. $a_1H = a_2H$ olsun $a_2^{-1}(a_1^{-1})^{-1} = a_2^{-1}a_1 \in H$

buradan $Ha_2^{-1} = Ha_1^{-1}$ olup f iyi tanımlıdır.

$\forall aH, bH \in L$ için $f(aH) = f(bH)$ olsun.

$f(aH) = Ha^{-1} = Hb^{-1} = f(bH) \Rightarrow a^{-1}(b^{-1})^{-1} \in H$ olup

$a^{-1}b \in H \Rightarrow b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in H \Rightarrow aH = bH$, f 1-1 dir.

$\forall Ha \in R$ için $Ha = H(a^{-1})^{-1} = f(a^{-1}H)$, $a^{-1}H \in L$ olup f örtendir.

Tanım 3.5.14 G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H nın G içindeki sol (sağ) kalan sınıflarının sayısına H nın G içindeki indeksi denir ve $[G:H]$ ile gösterilir.

Örnek 3.5.15 $\mathbb{Z}$ grubu için $H = \langle n \rangle \leq \mathbb{Z}$ olmak üzere $[\mathbb{Z}:H] = n$ dir.

Teorem 3.5.16 (Lagrance) G sonlu bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu taktirde $|H| \mid |G|$ dir. Ayrıca $|G| = [G:H].|H|$ dır.

İspat: G sonlu bir grup ve H nın G içindeki sol kalan sınıfları kümesi $L = \{a_1H, \ldots, a_nH\}$ ise $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} a_iH$ dır.

$i \neq j$ için $a_iH \neq a_jH$ olduğundan,

$$|G| = \sum_{i=1}^{n} |a_iH| = \sum_{i=1}^{n} |H| \implies |G| = n.|H| \implies |H| \mid |G| \text{ bulunur.}$$

Ayrıca $|L| = n$ olup $|L| = n = [G:H]$ olduğundan $|G| = [G:H].|H|$ elde edilir.

Sonuç 3.5.17 $|G|=n$ ise $\forall a\in G$ için, $a^n=e$ dir. Şu halde $o(a) \mid |G|=n$ dir.

Sonuç 3.5.18 (Euler Teoremi) $\forall a\in \mathbb{Z}$, $(a,m)=1$ için $a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod{m}$ dir.

İspat: $\mathbb{Z}_m^*$ asal kalan sınıfları $\varphi(m)$ elemanlı grup olduğundan Sonuç 3.5.16 ya göre $\forall \bar{a}\in \mathbb{Z}_m^*$ için $a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod{m}$ dir.

TEŞEKKÜRLER…