ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Devirli Gruplar

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 14

3.4 Devirli Alt Gruplar

Tanım 3.4.1 M, bir G grubunun bir alt kümesi olsun. M'yi kapsayan, G nin bütün alt gruplarının arakesitine M nin ürettiği alt grup denir ve $\langle M \rangle$ ile gösterilir. M nin elemanlarına da $\langle M \rangle$ grubunun üreteçleri denir.

$H \leq G$ ve $M \subset H$ ise tanımdan $\langle M \rangle \subset H$ olup $\langle M \rangle$, M alt kümesini kapsayan en küçük alt grup olarakta tanımlanabilir.

Teorem 3.4.2 $M \subset G$ olsun. M nin ürettiği alt grup
$\langle M \rangle = \{ a_1^{n_1} \cdots a_r^{n_r} \mid a_i \in M,\ r \in \mathbb{N},\ n_i \in \mathbb{Z},\ i = 1,2,\ldots,r \}$ dir.

İspat: $H = \{ a_1^{n_1} \cdots a_r^{n_r} \mid a_i \in M,\ r \in \mathbb{N},\ n_i \in \mathbb{Z},\ i = 1,2,\ldots,r \}$ nin G'nin alt grubu olduğunu gösterelim.

$a = a_1^{n_1} \cdots a_r^{n_r}$, $b = b_1^{m_1} \cdots b_s^{m_s}$, $a, b \in H$ olsun.

$a \cdot b^{-1} = a_1^{n_1} \cdots a_r^{n_r} \cdot b_s^{-m_s} \cdots b_1^{-m_1} \in H$ olduğundan $H \leq G$ dir.

$m \in M$ alalım. H nın tanımında $r = 1$, $n_1 = 1$ alınırsa $m \in H$ bulunur. $M \subset H$ dolayısıyla $H \leq G$ olduğundan $\langle M \rangle \subset H$ bulunur. Tersine $a = a_1^{n_1} \cdots a_r^{n_r} \in H$ alalım. $a_1, \ldots, a_r \in M \subset \langle M \rangle$ ve $\langle M \rangle$ grup olduğundan $a = a_1^{n_1} \cdots a_r^{n_r} \in \langle M \rangle$ yani $H \subset \langle M \rangle$ olup $H = \langle M \rangle$ bulunur.

Tanım 3.4.3 Bir G grubu için $G=\langle M\rangle$ olacak şekilde $M\subset G$ varsa G ye M ile üretilmiş grup denir. M sonlu ise G ye sonlu üretilmiş grup ve $M=\{a\}$ ise G ye a ile üretilmiş devirli grup denir ve $G=\langle a\rangle$ ile gösterilir.

Eğer G çarpımsal grup ise $\langle a\rangle=\{a^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ dir. G toplamsal grup ise $\langle a\rangle=\{na \mid a\in\mathbb{Z}\}$ dir.

Örnek 3.4.4 $\mathbb{Z}$, 1 ile üretilmiş sonsuz devirli gruptur.

Örnek 3.4.5 $G=\{1,-1,i,-i\}$ i ile üretilen 4. mertebeden devirli gruptur.

Not 3.4.6 $G=\langle a\rangle$ olsun. a nın pozitif kuvvetleri için iki durum söz konusudur.

1. durum: a nın bütün kuvvetleri birbirinden farklıdır. Bu durumda G sonsuz devirli grup olur.

2. durum: a nın bazı kuvvetleri aynıdır. $r>s$ tam sayıları için $a^r=a^s$ ise, $a^{r-s}=e$ bulunur. Pozitif tam sayılar iyi sıralı olduğundan $a^m=e$ şartını sağlayan $m>0$ tam sayılarının en küçüğü t bulunabilir. Bu durumda $G=\{a,a^2,\dots,a^t=e\}$ sonlu devirli grup olur. her $n\in\mathbb{Z}$ için $a^n\in G=\langle a\rangle$ olsun. $n=qt+r$, $0\leq r<t$, $\exists q,r\in\mathbb{Z}$ vardır. $a^n=a^{qt}\cdot a^r=a^r$ olduğundan $a^n\in\{a,a^2,\dots,a^t=e\}$ yani $G\subset\{a,a^2,\dots,a^t=e\}$ bulunur. $a\in G$ olduğundan ters kapsama da geçerlidir.

Teorem 3.4.7 Devirli bir grubun her alt grubuda devirlidir.

İspat: $G=\langle a\rangle$ ve $H\leq G$ olsun. $H=\langle e\rangle$ ise açık. $H\neq\{e\}$ ve $n\neq 0$ tam sayısı için $a^n\in H$ olsun. $H\leq G$ olduğundan $a^{-n}\in H$ dır. Genelliği bozmadan $n>0$ olmak üzere $a^n\in H$ alalım. Pozitif tam sayılar iyi sıralı olduğundan $a^s\in H$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı s olsun. Bu durumda $H=\langle a^s\rangle$ olduğunu gösterelim. $a^s\in H$ ve $H\leq G$ olup $\langle a^s\rangle\subset H$ dır. Tersine $a^n\in H$ olsun. $n=qs+r$, $0\leq r<s$, $\exists r,q\in\mathbb{Z}$ yazalım.

$$a^n=(a^s)^q\cdot a^r \Rightarrow a^r=a^n\cdot(a^s)^{-q}\in H \text{ bulunur.}$$

$a^r\in H$ olması ancak $r=0$ olması ile mümkün olup $a^n=(a^s)^q\in\langle a^s\rangle$ yani $H\subset\langle a^s\rangle$ bulunur. Dolayısıyla $H=\langle a^s\rangle$ dir.

Teorem 3.4.8 (i) $\langle a \rangle$ bir sonsuz devirli grup ise her alt grubu da sonsuz devirli gruptur.
(ii) $\langle a \rangle$, t. mertebeden devirli grup ise her alt grubunun mertebesi t'yi böler ve t nin her pozitif q böleni için mertebesi q olan bir ve yanlız bir alt grubu vardır.

İspat: (i) önceki teoremden devirli bir grubun her alt grubuda devirlidir. $H \leq \langle a \rangle$ olsun. Önceki teoremde $a^s \in H$ olan en küçük pozitif tam sayı s ise $H = \langle a^s \rangle$dir. $\langle a \rangle$ sonsuz devirli olduğundan a nın bütün pozitif kuvvetleri, dolayısıyla a^s nin bütün kuvvetleri birbirinden farklıdır. $H = \langle a^s \rangle$ de sonsuz devirli gruptur.

(ii) $\langle a\rangle = \{a, a^2, \dots, a^t = e\}$ ve $H \leq \langle a\rangle$ olsun. $a^s \in H$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı s ise $H = \langle a^s\rangle$ dir.
Şimdi $s|t$ olduğunu gösterelim. $t = sq + r$, $0 \leq r < s$, $\exists r, q \in \mathbb{Z}$ yazalım. $e = a^t = (a^s)^q \cdot a^r \Rightarrow a^r = (a^s)^{-q} \in H$ dır bu ise ancak $r = 0$ olması ile mümkündür, yani $s|t$ dir.
Eğer $t = sq$ ise $H = \langle a^s\rangle$ için mertebesi $q = t/s$ olur.
Çünkü $t = sq$ sayısı $a^t = e$ yapan en küçük pozitif tam sayıdır. Dolayısıyla $a^t = (a^s)^q = e$ yapan en küçük pozitif tam sayı q dur. O halde $o(H) = q$ bulunur.
$q|t$ ise $t = qs$ için s teklikle belirlidir.

Teorem 3.4.9 $G=\langle a \rangle$ n. mertebeden devirli grup olsun. a^s nin üreteç olması için gerekve yeter şart $(s,n)=1$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $G=\langle a\rangle=\langle a^s\rangle$ olsun. $a\in\langle a^s\rangle \Rightarrow a=(a^s)^t$, $\exists t\in\mathbb{N}$ olur. $a^{st-1}=e$ ve $n|st-1$ bulunur. $st-1=ny$ ve $st-ny=1$ olup $(s,n)=1$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $(s,n)=1$ olsun. $sx+ny=1$, $\exists x,y\in\mathbb{Z}$ var

$a=a^{sx+ny}=a^{sx}=(a^s)^x \Rightarrow a\in\langle a^s\rangle$ olup

$G=\langle a\rangle\subset\langle a^s\rangle$ bulunur. Dolayısıyla $\langle a\rangle=\langle a^s\rangle$ dir.

Sonuç 3.4.10 $G=\langle a\rangle$, n. mertebeden devirli bir grup ise üreteç sayısı $\varphi(n)$ ile bellidir.

Teorem 3.4.11: $G=\langle a\rangle$ sonsuz devirli grup ise üreteçleri a ve a^{-1} dir.

İspat: a^s, $G=\langle a\rangle$ nın bir üreteci ise $(a^s)^x=a$ olacak şekilde $\exists x\in\mathbb{Z}$ bulunabilirdi. $\langle a\rangle$ sonsuz devirli grup olduğundan $sx=1$ yani $s=\mp 1$ dir.

Teorem 3.4.12 H ve K iki sonlu grup $G=H\times K$ ve $(h,k)\in G$ olsun. O zaman $o((h,k))=\text{ekok}(o(h),o(k))$ dır.

İspat! $\text{ekok}(o(h),o(k))=s$ ve $o((h,k))=t$ olsun.

s hem $o(h)$ ve hem $o(k)$ nın bir katı olduğundan

$(h,k)^s=(h^s,k^s)=(e_H,e_K) \Rightarrow t|s$ bulunur.

Diğer yandan $(h,k)^t=(h^t,k^t)=(e_H,e_K)$ olduğundan $s|t$ olup $s=t$ bulunur.

Teorem 3.4.13 H ve K sonlu iki devirli grup ve $G = H \times K$ olsun. G nin devirli olması için gerek ve yeter şart $ebob(|H|, |K|) = 1$ olmasıdır.

İspat: $|H| = m$ ve $|K| = n$ olsun. O zaman $|G| = m.n$ dir.

($\Rightarrow$) G devirli olsun. $ebob(m, n) = d$ ve $G = \langle (h, k) \rangle$ alalım. $(h, k)^{mn/d} = ((h^m)^{n/d}, (k^n)^{m/d}) = (e_H, e_K)$

$o((h,k)) = m.n \leq mn/d$, (Teorem 3.1.18) Böylece $d = 1$ bulunur.

($\Leftarrow$) $ebob(|H|, |K|) = 1$ olsun. $H = \langle h \rangle$, $K = \langle k \rangle$ olacak şekilde $h \in H$, $k \in K$ var. $o(h) = m$, $o(k) = n$ dir. O halde $o((h,k)) = ekok(o(h), o(k)) = ekok(m, n) = m.n = |G|$ bulunur. (Teorem 3.4.12)

Örnek 3.4.14 $\mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_5$ grubunda mertebesi 5 olan elemanları belirleyelim.

$$5 = o((a,b)) = \text{ekok}(o(a), o(b)), \quad (a,b) \in \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_5$$

bulalım. Burada $o(a) = o(b) = 5$ veya $o(a) = 5$, $o(b) = 1$ veya $o(a) = 1$, $o(b) = 5$ olabilir. Birinci durumda $a = \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}$ $b = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ olup mertebesi 5 olan 16 eleman vardır. İkinci durumda $a = \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}$, $b = \bar{0}$ olup 4 eleman vardır. Bunlar $(\bar{3},\bar{0}), (\bar{6},\bar{0}), (\bar{9},\bar{0}), (\overline{12},\bar{0})$ dir. Üçüncü durumda $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ olup 4 eleman vardır. Bunlar $(\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{0},\bar{3}), (\bar{0},\bar{4})$ dir.

Örnek 3.4.15 $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ grubu için $(m,n) = 1$ ise grup devirli aksi halde değildir.

TEŞEKKÜRLER…