1

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Bağıntı Denklik Bağıntısı

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 5

2

BAĞINTI VE FONKSİYONLAR

Tanım: A ve B boştan farklı iki küme olsun. $A\times B$ nin her alt kümesine A dan B ye bir <u>bağıntı</u> denir.

$\mathcal{R}\subseteq A\times B$, $(a,b)\in\mathcal{R}$ ise $a\in A$ ile $b\in B$ elemanı bağıntılıdır denir ve $a\mathcal{R}b$ ile gösterilir.

$A=B$ ise $\mathcal{R}\subseteq A\times A$ bağıntısına A da bir bağıntı denir.

Örnek: $A=\{x,y,z,t\}$, $B=\{m,n\}$

$\mathcal{R}=\{(x,m),(y,n),(z,m),(z,n),(t,n)\}\subseteq A\times B$

$(y,n)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow y\mathcal{R}n$

Tanım: A ve B iki küme, $\mathcal{R}$ A dan B ye bir bağıntı olsun. $\mathcal{R}^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in\mathcal{R}\}$ bir bağıntıdır ve bu bağıntıya $\mathcal{R}$ bağıntısının tersi denir.

Bir önceki örnekteki bağıntının tersi

$\mathcal{R}^{-1} = \{(m,x), (n,y), (m,z), (n,z), (n,t)\} \subseteq B \times A$

Tanım: $\mathcal{R}$, A dan B ye bir bağıntı olsun.

$\{a \in A : \exists\, b \in B \text{ için } a\mathcal{R}b\}$ ve

$\{b \in B : \exists\, a \in A \text{ için } a\mathcal{R}b\}$

kümelerine sırasıyla $\mathcal{R}$ bağıntısının tanım ve değer kümeleri denir.

Tanım: $\mathcal{R}$, A kümesi üzerinde bir bağıntı olsun.

i) $\forall a \in A$ için $a\mathcal{R}a$ $((a,a) \in \mathcal{R})$ oluyorsa $\mathcal{R}$ bağıntısının yansıma özelliği vardır veya $\mathcal{R}$ bağıntısı yansıyandır denir.

Örnek: $A = \{a, b, c\}$

$\mathcal{R} = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c)\}$

ii) $a, b \in A$ için $\forall (a,b) \in \mathcal{R}$ iken $(b,a) \in \mathcal{R}$ oluyorsa $\mathcal{R}$ bağıntısına simetrik bağıntı denir.

Örnek: $A = \{x, y, z, t\}$

$\mathcal{R} = \{(x,y), (y,x), (x,t), (t,x)\}$

$\mathcal{S} = \{(x,x), (z,z)\}$

iii) $a, b \in A$ için $\forall (a,b) \in \mathcal{R}$ ve $(b,a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$ oluyorsa $\mathcal{R}$ ye ters simetrik bağıntı denir.

iv) $a, b, c \in \mathcal{R}$ için

$\forall (a,b) \in \mathcal{R}$ ve $(b,c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{R}$ sağlanıyorsa $\mathcal{R}$ bağıntısının geçişme özelliği vardır denir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathcal{S} = \{(1,2), (3,1), (2,4), (1,4), (1,1)\}$

$(3,1) \in \beta$ ve $(1,2) \in \beta$ olduğu halde $(3,2) \notin \beta$ dir.
Dolayısıyla geçişme özelliği yoktur.

Tanım: $\mathcal{R}$, A üzerinde bir bağıntı olsun. $\mathcal{R}$ bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa $\mathcal{R}$ ye A üzerinde bir <u>denklik bağıntısı</u> denir.

Örnek: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $x \sim y \Longleftrightarrow 4 \mid x-y$ biçiminde tanımlanan $\sim$ bir denklik bağıntısı mıdır?

$$4 \mid x-y \Leftrightarrow x-y = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\sim = \{ \dots, (1,5), (5,1), (2,6), \dots \}$$

* yansıma özelliği: $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x \sim x$ mıdır?

$$x-x = 0 = 4.0 \Rightarrow 4 \mid x-x \Rightarrow x \sim x$$

* simetri özelliği: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $x \sim y \Rightarrow y \sim x$?

$$\begin{aligned} x \sim y &\Rightarrow 4 \mid x-y \Rightarrow x-y = 4t,\ t \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow y-x = 4(-t),\ -t \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow 4 \mid y-x \\ &\Rightarrow y \sim x \end{aligned}$$

* $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}$ için $x \sim y$ ve $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ mi?

$$\begin{aligned} x \sim y \text{ ve } y \sim x &\Rightarrow 4 \mid x-y,\ 4 \mid y-z \\ &\Rightarrow x-y = 4k,\ y-z = 4t,\ k,t \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x-z = 4(k+t),\ k+t \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow 4 \mid x-z \\ &\Rightarrow x \sim z \end{aligned}$$

$\therefore \sim$ bir denklik bağıntısıdır.

Örnek: $C = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$\beta = \{ (1,2), (2,1), (1,1), (2,2), (3,3), (4,5), (5,4), (4,4), (5,5) \}$

bağıntısının hangi özellikleri sağladığını araştırınız.

* $1 \in C$ için $(1,1) \in \beta$ $\quad$ $3 \in C$ için $(3,3) \in \beta$
  $2 \in C$ için $(2,2) \in \beta$ $\quad$ $4 \in C$ için $(4,4) \in \beta$
  $5 \in C$ için $(5,5) \in \beta$

$\forall x \in C$ için $(x,x) \in C$ olduğu için yansıma özelliği vardır.

* $\forall x,y \in C$ için $(x,y) \in \beta \Rightarrow (y,x) \in \beta$ mı?
  $(1,2) \in \beta \Rightarrow (2,1) \in \beta$
  $(4,5) \in \beta \Rightarrow (5,4) \in \beta$

olduğu için β bağıntısının simetri özelliği vardır.

* $\forall x,y \in C$ için $(x,y) \in \beta$ ve $(y,x) \in \beta \Rightarrow x = y$ mi?
  $(1,2) \in \beta$ ve $(2,1) \in \beta \Rightarrow 1 \neq 2$ olduğundan β bağıntısının ters simetri özelliği yoktur.

* $\forall x,y,z \in C$ için $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta \Rightarrow (x,z) \in \beta$ sağlandığından β bağıntısının geçişme özelliği vardır.

Örnek: S ile T, X kümesinden Y kümesine iki bağıntı olsun $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$ olduğunu gösteriniz.

$S \subseteq X \times Y \qquad T \subseteq X \times Y$

$S^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in S\} \qquad T^{-1} = \{(z,t) : (t,z) \in T\}$

$$
\begin{aligned}
(S \cap T)^{-1} &= \{(a,b) : (b,a) \in S \cap T\} \\
&= \{(a,b) : (b,a) \in S \text{ ve } (b,a) \in T\} \\
&= \{(a,b) : (a,b) \in S^{-1} \text{ ve } (a,b) \in T^{-1}\} \\
&= \{(a,b) : (a,b) \in S^{-1} \cap T^{-1}\} \\
&= S^{-1} \cap T^{-1}
\end{aligned}
$$

Örnek: Bir A kümesi üzerinde α ve β gibi iki bağıntı verilsin. α ve β simetrik ise $\alpha \cup \beta$ simetriktir. Gösteriniz.

$\forall a,b \in A$ için $(a,b) \in \alpha\cup\beta \Rightarrow (b,a) \in \alpha\cup\beta$?

$$\begin{aligned}(a,b)\in\alpha\cup\beta &\Rightarrow (a,b)\in\alpha \text{ veya } (a,b)\in\beta\\ &\Rightarrow (b,a)\in\alpha \text{ veya } (b,a)\in\beta\\ &\Rightarrow (b,a)\in\alpha\cup\beta\end{aligned}$$

$\therefore$ $\alpha\cup\beta$ simetriktir.

Tanım: $\sim$, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $a\in X$ için a elemanının denklik sınıfı;

$$\bar{a} = \{b \in X : a \sim b\}$$

kümesidir.

Örnek: $x,y \in \mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow 4 \mid x-y$ olsun.

$$\begin{aligned}\bar{1} = \{y\in\mathbb{Z} : 1\sim y\} &= \{y\in\mathbb{Z} : 4 \mid 1-y\}\\ &= \{\dots,-7,-3,1,5,9,\dots\}\end{aligned}$$

$\bar{2} = \{\dots,-4,-2,2,6,\dots\}$

$\bar{5} = \{\dots,-7,-3,1,5,9,\dots\}$

* $\bar{1} = \bar{5}$ $(1 \sim 5)$

Önerme: $\sim$, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun $a,b\in X$ olmak üzere $a\sim b \Leftrightarrow \bar{a}=\bar{b}$ olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow:)$ $a\sim b$ olsun. $\bar{a}=\bar{b}$ mi?

$$\left.\begin{aligned} c\in\bar{a} &\Rightarrow c\sim a \underset{a\sim b}{\Longrightarrow} c\sim b \Rightarrow c\in\bar{b}\\ c\in\bar{b} &\Rightarrow c\sim b \underset{a\sim b}{\Longrightarrow} c\sim a \Rightarrow c\in\bar{a}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{a}=\bar{b}$$

$(\Leftarrow:)$ $\bar{a}=\bar{b}$ olsun. $a\sim b$ mi?

$\sim$ denklik bağıntısı olduğundan yansıma özelliği vardır.

$a\in\bar{a} \underset{\bar{a}=\bar{b}}{\Longrightarrow} a\in\bar{b} \Rightarrow a\sim b$

11

Teorem: $\sim$, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. X in tüm elemanlarının denklik sınıflarının oluşturduğu aile X kümesinin bir ayrışımıdır.

$$\mathcal{A}=\{\bar{a} : a\in X\}$$

İspat: i) $\forall \bar{a}\in\mathcal{A}$ olsun. $a\in\bar{a} \Rightarrow \bar{a}\neq\emptyset$

ii) $\bar{a},\bar{b}\in\mathcal{A},\ \bar{a}\neq\bar{b} \Rightarrow \bar{a}\cap\bar{b}=\emptyset$ mi?

$\bar{a}\cap\bar{b}\neq\emptyset$ olsun.

$$c\in\bar{a}\cap\bar{b} \Rightarrow c\in\bar{a} \text{ ve } c\in\bar{b}$$
$$\Rightarrow a\sim c \text{ ve } c\sim b$$
$$\Rightarrow a\sim b \Rightarrow \bar{a}=\bar{b} \quad (\text{Çelişki } \bar{a}\neq\bar{b} \text{ idi})$$

$\therefore\ \bar{a}\cap\bar{b}=\emptyset$

iii) $\bigcup_{\bar{a}\in\mathcal{A}}\bar{a}=X$ mi?

$$b\in\bigcup_{\bar{a}\in\mathcal{A}}\bar{a} \Rightarrow \exists\bar{a}\in\mathcal{A} \ni b\in\bar{a}\subseteq X$$
$$\Rightarrow b\in X \Rightarrow \bigcup_{\bar{a}\in\mathcal{A}}\bar{a}\subseteq X$$

$$b\in X \Rightarrow b\in\bar{b} \Rightarrow b\in\bigcup_{\bar{a}\in\mathcal{A}}\bar{a} \Rightarrow X\subseteq\bigcup_{\bar{a}\in\mathcal{A}}\bar{a}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\bar{a}\in\mathcal{A}}\bar{a}=X$$

12

$\therefore$ $\mathcal{A}$ ailesi X in bir ayrışımıdır.

Teorem: $\{A_i : i\in I\}$ küme ailesi X kümesinin bir ayrışımı olsun. Bu taktirde A_i kümelerinden her biri birer denklik sınıfı olacak şekilde X üzerinde bir denklik bağıntısı vardır.

$$x,y\in X \text{ için } x\sim y \Leftrightarrow \exists\, i\in I \text{ için } x,y\in A_i$$

biçiminde tanımlanan $\sim$, X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım: $\sim$, A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $\sim$ bağıntısına göre tüm denklik sınıflarının kümesine A kümesinin $\sim$ denklik bağıntısına göre <u>bölüm kümesi</u> denir ve $A/_\sim$ ile gösterilir.

$$A/_\sim=\{\bar{a} : a\in A\}$$

NOT: $A/_\sim$ bölüm kümesindeki her bir denklik sınıfından birer eleman alarak oluşturulan kümeye de <u>tam temsilciler</u> kümesi denir.

13

Örnek: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $x \sim y \iff 4 \mid x-y$ olsun.

$\mathbb{Z}/\sim = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$\{0,1,2,3\} \longrightarrow$ tam temsilciler kümesi

Önerme: $\sim$, A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Denklik bağıntısının birbirinden farklı denklik sınıfları ikişer ikişer ayrıktır.

İspat: $A/\sim = \{\bar{x} : x \in A\}$

$\bar{x}, \bar{y} \in A/\sim$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ için $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ mi?

$\bar{x} \neq \bar{y}$ ve $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ olsun. O halde $\exists z \in \bar{x} \cap \bar{y}$ vardır.

$$z \in \bar{x} \cap \bar{y} \Rightarrow z \in \bar{x} \text{ ve } z \in \bar{y}$$
$$\Rightarrow x \sim z \text{ ve } z \sim y$$
$$\Rightarrow x \sim y \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \quad (\text{çelişki } \bar{x} \neq \bar{y} \text{ idi})$$

14

$\therefore \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

Tanım: A boştan farklı bir küme, β A kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. β bağıntısının yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri varsa β ya bir <u>sıralama</u> (kısmi sıralama) bağıntısı denir.

A kümesi üzerinde bir sıralama bağıntısı varsa A kümesine <u>sıralı küme</u> (kısmi sıralı küme) denir.

Örnek: $\mathbb{Z}$ kümesinde, $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için

$$a \beta b \iff a \leq b$$

biçiminde tanımlanan β, bir sıralama bağıntısıdır.

Örnek: $\mathbb{Z}^*$ kümesinde, $\forall x,y \in \mathbb{Z}^*$ için

$$x \beta y \iff x \mid y$$

biçiminde tanımlanan β, bir sıralama bağıntısı değildir.

15

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Soyut Matematik

Bağıntı Denklik Bağıntısı

Ders 5