1

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Küme Aileleri

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 4

2

KÜMELER CEBİRİ

Tanım: Küme bir takım nesnelerin bir topluluğudur. Kümeyi oluşturan nesnelerin herbirine de o kümenin bir elemanı denir.

Kümeler büyük harflerle gösterilir.

$x \in A$ (x, A kümesine ait)

$x \notin A$ (x, A kümesine ait değil)

Hiç bir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve $\emptyset$ veya $\{\}$ ile gösterilir.

Örnek: $X = \{x \in \mathbb{N} : |x-3| < 2\}$

$|x-3| < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$

$X = \{2, 3, 4\}$

Tanım: A ve B herhangi iki küme olsun. A kümesinin her bir

3

ise <u>indis</u> kümesi denir.

$\{A_i : i \in I\}$ ailesinin I indis kümesi sonlu ise küme ailesi $\{A_i : i \in I\} = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ ile gösterilir.

Tanım: $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ olmak üzere

i) $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I \text{ için } x \in A_i\}$

kümesine $\mathcal{A}$ ailesinin <u>arakesiti</u> denir ve $\bigcap_{i \in I} A_i$ veya $\bigcap \mathcal{A}$ veya $\bigcap_{A_i \in \mathcal{A}} A_i$ biçiminde gösterilir.

ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I \text{ için } x \in A_i\}$

kümesine $\mathcal{A}$ ailesinin <u>birleşimi</u> denir ve $\bigcup_{i \in I} A_i$ veya $\bigcup \mathcal{A}$ veya $\bigcup_{A_i \in \mathcal{A}} A_i$ biçiminde gösterilir.

4

Teorem: $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ ailesi verilmiş olsun.

i) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$

ii) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' = \bigcap_{i \in I} A_i'$

İspat: i)

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' &= \{x : x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)'\} \\ &= \{x : x \notin \bigcap_{i \in I} A_i\} \\ &= \{x : \exists i \in I \text{ için } x \notin A_i\} \\ &= \{x : \exists i \in I \text{ için } x \in A_i'\} \\ &= \bigcup_{i \in I} A_i'\end{aligned}$$

ii) (i) ye benzer şekilde yapılır.

5

Tanım: $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ küme ailesi, $J \subseteq I$ olsun. $\mathcal{B} = \{A_j : j \in J\}$ kümesine $\mathcal{A}$ küme ailesinin <u>alt küme ailesi</u> denir ve $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ile gösterilir.

Teorem: $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, B bir küme olsun. Bu durumda

i) $B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

ii) $B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$

İspat: i) $B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \{x : x \in B \text{ ve } x \in \bigcup_{i\in I} A_i\}$

$= \{x : x \in B \text{ ve } \exists i \in I \text{ için } x \in A_i\}$

$= \{x : \exists i \in I \text{ için } x \in B \text{ ve } x \in A_i\}$

$= \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

ii) (i) ye benzer şekilde yapılır.

6

Tanım: $A \neq \emptyset$, $B_i \subseteq A$ ve $i \in I$ olsun.

i) $\forall i \in I$ için $B_i \neq \emptyset$

ii) $i, j \in I$ ve $i \neq j$ için $B_i \cap B_j = \emptyset$

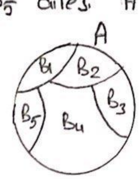
iii) $\bigcup_{i \in I} B_i = A$

özellikleri sağlanıyorsa $\{B_i : i \in I\}$ küme ailesine A kümesinin bir <u>ayrışımı</u> denir.

Örnek: $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3,4\}$, $B_3 = \{5\}$, $B_4 = \{6,7\}$, $B_5 = \{8,9,10\}$

B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ailesi A nın bir ayrışımıdır.



Örnek 4: $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 2\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 1\}$
$C = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\}$
$\mathcal{B} = \{A, B, C\}$ ailesi $\mathbb{Z}$ nin bir ayrışımıdır.

$A = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq -2$ veya $x \geq 2\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} : -1 < x < 1\}$
$C = \{-1, 1\}$

i) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$

ii) $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$

iii) $A \cup B \cup C = \mathbb{Z}$

olup $\mathcal{B}$ ailesi $\mathbb{Z}$ nin bir ayrışımıdır.

Tanım: A ve B herhangi iki küme olsun. $a \in A$, $b \in B$ olmak üzere (a, b) biçimindeki sıralı ikililerin kümesine A ile B kümelerinin kartezyen çarpımı denir ve $A \times B$ ile gösterilir.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri verilsin.

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

kümesine $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

NOT: i) $A \times B \neq B \times A$

ii) $(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$

iii) $A \times B \neq \emptyset \iff A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

Önerme: A, B, C kümeleri verilsin.

i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

iii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

İspat: i)

$$(x,y)\in A\times(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A \text{ ve } y\in B\cup C$$
$$\Leftrightarrow x\in A \text{ ve } (y\in B \text{ veya } y\in C)$$
$$\Leftrightarrow (x\in A \text{ ve } y\in B) \text{ veya } (x\in A \text{ ve } y\in C)$$
$$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \text{ veya } (x,y)\in A\times C$$
$$\Leftrightarrow (x,y)\in (A\times B)\cup(A\times C)$$

ii) (i) ye benzer şekilde yapılır.

iii)

$$(x,y)\in A\times(B-C) \Leftrightarrow x\in A \text{ ve } y\in B-C$$
$$\Leftrightarrow x\in A \text{ ve } (y\in B \text{ ve } y\notin C)$$
$$\Leftrightarrow (x\in A \text{ ve } y\in B) \text{ ve } (x\in A \text{ ve } y\notin C)$$
$$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \text{ ve } (x,y)\notin A\times C$$
$$\Leftrightarrow (x,y)\in (A\times B)-(A\times C)$$

Örnek: $\forall k\in\mathbb{Z}$ için $A_k=[k,k+1]\subseteq\mathbb{R}$ veriliyor

$$\bigcup_{k=1}^{7} A_k = \{x : \exists k\in I \text{ için } x\in A_k\}$$

$$=\{x : \exists k\in I \text{ için } x\in[k,k+1]\}$$
$$=\{x : \exists k\in I \text{ için } k\le x\le k+1\}$$
$$=\{x : 1\le x\le 2 \vee 2\le x\le 3 \vee \dots \vee 7\le x\le 8\}$$
$$=\{x : 1\le x\le 8\}=[1,8]$$

Örnek: B bir küme, I bir indis kümesi, $\mathcal{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ bir kümeler ailesi olmak üzere

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\times B = \bigcup_{i\in I}(A_i\times B)$$

olduğunu gösteriniz.

$$(x,y)\in\left(\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\times B\right) \Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I} A_i \text{ ve } y\in B$$
$$\Leftrightarrow \exists i\in I,\ x\in A_i \text{ ve } y\in B$$
$$\Leftrightarrow \exists i\in I,\ (x,y)\in A_i\times B$$
$$\Leftrightarrow (x,y)\in\bigcup_{i\in I}(A_i\times B)$$

11

Örnek: $A-B=A \Leftrightarrow A\cap B=\emptyset$ olduğunu gösteriniz.

$(\Rightarrow:)$ $A-B=A$ olsun. $A\cap B=\emptyset$ mi?

$A-B=A \Rightarrow A\cap B'=A$

$\Rightarrow (A\cap B')\cap B = A\cap B$

$\Rightarrow A\cap (B'\cap B) = A\cap B$

$\Rightarrow A\cap \emptyset = A\cap B$

$\Rightarrow A\cap B=\emptyset$

$(\Leftarrow:)$ $A\cap B=\emptyset$ olsun. $A-B=A$ mi?

$A\cap B=\emptyset \Rightarrow A'\cup (A\cap B) = A'\cup\emptyset$

$\Rightarrow (A'\cup A)\cap (A'\cup B) = A'$

$\Rightarrow E\cap (A'\cup B) = A'$

$\Rightarrow A'\cup B = A'$

$\Rightarrow (A'\cup B)' = (A')'$

$\Rightarrow A\cap B' = A$

$\Rightarrow A-B=A$

$\therefore$ $A-B=A \Leftrightarrow A\cap B=\emptyset$

12

UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Soyut Matematik

Küme Aileleri

Ders 4