1

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi
# Fen Edebiyat Fakültesi
# Matematik Bölümü
# Dijital Ders Platformu

Matematiksel İspatlar Ve
Nceleyiciler

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 2

2

## MATEMATİKSEL İSPATLAR VE NİCELEYİCİLER

Matematikte yapılan en önemli işlemlerden biri verilen teoremleri ispatlamaktır. $p \Rightarrow q$ ya da $p \Leftrightarrow q$ biçiminde ifade edilen teoremlerin ispatında başlıca iki ilke uygulanır

1) Tümevarım
2) Tümden gelim
   i) Doğrudan ispat yöntemi
   ii) Doğruluk çizelgeleri yöntemi
   iii) Dolaylı ispat yöntemi
   (iii) a) Olmayana ergi yöntemi
   b) Çelişki bulma yöntemi

### Doğrudan İspat Yöntemi

$p \Rightarrow q$ önermesini ispatlamak için doğru olduğu bilinen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ önermeleri ve $p \Rightarrow P_1$, $P_1 \Rightarrow P_2$, $\ldots$, $P_{n-1} \Rightarrow P_n$

3

ve $P_n \Rightarrow q$ önermelerinin doğrulukları kullanılarak $p \Rightarrow q$ önermesinin doğru olduğu gösterilir.

**Örnek:** $x \in \mathbb{N}$ sayısı tek sayı ise $x^2$ tek sayıdır. Gösteriniz.

p: x tek sayı

q: $x^2$ tek sayıdır.

p: x tek sayı

$P_1$: $x = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$P_2$: $x^2 = (2k+1)^2$, $k \in \mathbb{N}$

$P_3$: $x^2 = 4k^2+4k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$P_4$: $x^2 = 2(2k^2+2k)+1$, $2k^2+2k \in \mathbb{N}$

q: $x^2$ tek sayıdır.

$$p \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow q$$

olduğundan $p \Rightarrow q$ dur. Dolayısıyla $p \Rightarrow q$ önermesi doğrudur.

Yani;



4

p: x tek sayı $\Rightarrow x = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x^2 = (2k+1)^2$, $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x^2 = 4k^2+4k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x^2 = 2(2k^2+2k)+1$, $2k^2+2k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x^2$ tek sayıdır : q

**Örnek:** $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun.

$3 \mid a+1$, $3 \mid b+1$, $3 \mid c+1$ ise $3 \mid a+b+c$ olur mu? Gösteriniz.

5

# Dolaylı İspat Yöntemi:

## a) Olmayana Ergi Yöntemi:

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ olduğunu biliyoruz. $p \Rightarrow q$ önermesinin doğru olduğunu göstermek yerine ona denk olan $q' \Rightarrow p'$ önermesinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir.

**Örnek:** $x, y \in \mathbb{N}$ olsun. $xy$ bir çift sayı ise $x$ ve $y$ den en az biri çift sayıdır. Gösteriniz.

$p$: $xy$ bir çift sayı.
$q$: $x$ ve $y$ den en az biri çift sayıdır

$q'$: $x$ ve $y$ tek sayıdır $\Rightarrow x = 2k+1,\ y = 2t+1,\quad k, t \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow xy = (2k+1)(2t+1),\quad k, t \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow xy = 2(2kt+k+t)+1,\quad 2kt+k+t \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow xy$ tek sayıdır: $p'$

$\therefore$ $q' \Rightarrow p'$ önermesi doğrudur. Dolayısıyla bu önermeye denk olan $p \Rightarrow q$ önermesi de doğrudur.



6

## b) Çelişki Bulma Yöntemi

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q \equiv (p \wedge q')'$ olduğunu biliyoruz. $p \Rightarrow q$ önermesinin doğru olduğunu göstermek için $p \wedge q'$ önermesinin yanlış olduğu (çelişki olduğu) gösterilmelidir. Bu durumda $(p \wedge q')'$ doğru olacağından ona denk olan $p \Rightarrow q$ önermesi de doğru olur.

1. $p$ doğru, $q'$ doğru olduğu kabul edilir
2. $p \wedge q'$ önermesinin yanlış olduğu görülür.
3. $p \wedge q'$ yanlış ise $(p \wedge q')'$ doğrudur
4. $(p \wedge q')' \equiv p \Rightarrow q$ doğrudur.

**Örnek:** $a \in \mathbb{Z}$ olsun. $6|a$ ise $2|a$ mi? Gösteriniz.

$p$: $6|a$
$q$: $2|a$

$6|a$ ve $2 \nmid a$ olsun. $q'$: $2 \nmid a \Rightarrow a$ tek sayı
$p$: $6|a \Rightarrow a = 6k,\ k \in \mathbb{Z}$

7

$p \wedge q'$ : $\underbrace{a=6k,\ k\in\mathbb{Z} \ \wedge\ a \text{ tek sayı}}_{\text{Çelişki}}$

$\therefore\ p\wedge q' \equiv 0\ ,\ (p\wedge q')' \equiv 1$

$\therefore\ p \Rightarrow q$ doğru olur.

**Doğruluk Çizelgeleri Yöntemi:**

Doğruluk çizelgesinin esas sütununa bakılır. Esas sütunun hepsi doğru ise ispat tamamlanmış olur.

**Tümevarım Yöntemi:**

Doğal sayılara ait bir özelliği göstermek için kullanılan yöntemdir. Tümevarım ile ispat yapmak için sırasıyla aşağıdaki işlemler yapılır.



8

1. Önermenin $n=0$ için doğru olduğu gösterilir.
2. Önermenin $n=k$ için doğru olduğu kabul edilir.
3. Önermenin $n=k+1$ için doğru olduğu gösterilir.

**Örnek:** Her $n\in\mathbb{N}$ için

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

* $n=1$ için doğru mu?

$1 = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1=1$ $\quad\therefore$ $n=1$ için doğrudur.

* $n=k$ için doğru olsun. Yani;

$$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

* $n=k+1$ için doğru mu?

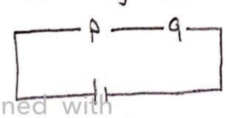
$$1+2+\cdots+(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \quad ?$$

$$1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

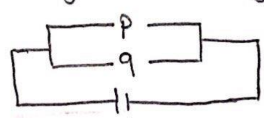
$\therefore$ $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ eşitliği gerçeklenir.

## Önermeler Mantığının Elektrik Devrelerine Uygulanması

Seri bağlı devre $\wedge$, paralel bağlı devre $\vee$ bağlacı ile gösterilir.




$p \wedge q$

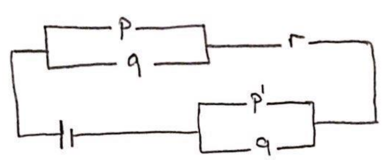



$p \vee q$





**Örnek:**




$[(p \vee q) \wedge r] \wedge (p' \vee q)$

## NİCELEYİCİLER

**Tanım:** İfadesinde değişkenler bulunan ve bu değişkenlerin aldığı değerlere göre doğruluk değeri değişen önermelere <u>açık önerme</u> denir.

Açık önermeler genellikle $P(x)$, $P(x,y)$, ... ile gösterilir.

Bir açık önermeyi doğru kılan değişkenlerin kümesine açık önermenin <u>doğruluk kümesi</u> denir.

11

**Örnek:** 1) $P(x): x \in \mathbb{N},\ x^2+1=10$ önermesinin doğruluk kümesi $A=\{3\}$

2) $P(x,y): x,y \in \mathbb{Z},\ x^2+y^2=1$ önermesinin doğruluk kümesi
$A=\{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$

**Tanım:** Önermelerde nicelik belirten "bütün, en az, bazı, her, hiçbir" gibi sözcüklere niceleyiciler denir.

**Tanım:** Bir $P(x)$ açık önermesi bir $A$ kümesindeki her eleman için doğruysa "her $x \in A$ için $P(x)$" doğrudur (aksi halde yanlıştır) denir.

$$\forall x \in A,\ P(x) \quad \text{veya}$$
$$\forall x\,[x \in A \Rightarrow P(x)]$$

biçiminde gösterilir. $\forall$ sembolüne evrensel niceleyici denir.



12

**Örnek:** 1) $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, $P(x): |x-3| \geq 0$

$\forall x \in A$ için $P(x)$ önermesi doğrudur.

2) $\forall x \in \mathbb{Z}$ için, $|x| \geq 1$ önermesi yanlıştır. $x=0$ için $|0|=0<1$.

**Tanım:** Bir $P(x)$ açık önermesi bir $A$ kümesinin bazı elemanları (en az bir elemanı) için doğru ise "En az bir $x \in A$ için $P(x)$" doğrudur (aksi halde yanlıştır) denir.

$$\exists x \in A,\ P(x) \quad \text{veya}$$
$$\exists x\,[x \in A \wedge P(x)]$$

biçiminde gösterilir $\exists$ sembolüne varlıksal niceleyici denir.

**Örnek:** 1) $\exists x \in \mathbb{Z}$, $|x| \geq 1$ önermesi doğrudur. Çünkü 1 tamsayısı için $|1|=1 \geq$ dir.

**2)** $A=\{1,2,3,4\}$ , $P(x):\ x^2+1<0$

$P(x)$ önermesi $A$ kümesindeki hiçbir eleman için doğru değildir.

**Tanım:** $P(x)$ ve $q(x)$ açık önermeler; her $a\in A$ için $P(a)\equiv q(a)$ oluyorsa $P(x)$ ve $q(x)$ önermeleri $A$ kümesi üzerinde <u>denk önermelerdir</u> denir.

**Örnek:** $A=\mathbb{R}$ $\quad p(x):\ x^2\geq 0$ , $q(x):\ |x|\geq 0$ olsun.
$\forall a\in\mathbb{R}$ için $p(a)\equiv q(a)$ dır.

**Teorem:** $A$ kümesi üzerinde tanımlı bir $P(x)$ açık önermesi için

i) $[\forall x\in A,\ P(x)]'\equiv \exists x\in A,\ P'(x)$

ii) $[\exists x\in A,\ P(x)]'\equiv \forall x\in A,\ P'(x)$

**İspat:** i) "$\forall x\in A,\ P(x)$" önermesi doğru ise $P(x)$ açık önermesinin doğruluk kümesi $A$ kümesine eşittir. Bu durumda





$P'(x)$ önermesinin doğruluk kümesi $\emptyset$ olur. Yani;

"$\forall x\in A,\ P(x)$"

önermesi doğru ise

"$\exists x\in A,\ P'(x)$"

önermesi yanlıştır. Benzer şekilde,

"$\forall x\in A,\ P(x)$"

önermesi yanlış ise

"$\exists x\in A,\ P'(x)$"

önermesi doğrudur. Buradan

$$[\forall x\in A,\ P(x)]'\equiv \exists x\in A,\ P'(x)$$

elde edilir.

ii) (i) ye benzer şekilde yapılır.

**Örnek:** $[\exists x\in\mathbb{Z},\ x+1<8]'\equiv \forall x\in\mathbb{Z},\ x+1\geq 8$

$[\forall x\in\mathbb{R},\ |x^2-1|<0]'\equiv \exists x\in\mathbb{R},\ |x^2-1|\geq 0$

15

**Teorem:** $p(x)$ ve $q(x)$, A kümesi üzerinde tanımlı iki açık önerme olsun.

1) $[\forall x \in A, p(x) \wedge q(x)] \equiv [\forall x \in A, p(x)] \wedge [\forall x \in A, q(x)]$

2) $[\forall x \in A, p(x) \vee q(x)] \equiv [\forall x \in A, p(x)] \vee [\forall x \in A, q(x)]$

3) $[\exists x \in A, p(x) \wedge q(x)] \equiv [\exists x \in A, p(x)] \wedge [\exists x \in A, q(x)]$

4) $[\exists x \in A, p(x) \vee q(x)] \equiv [\exists x \in A, p(x)] \vee [\exists x \in A, q(x)]$

* $\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)$: A kümesindeki her x elemanı ve B kümesindeki her y elemanı için $p(x,y)$ önermesi doğrudur (yanlıştır).

* $\forall x \in A, \exists y \in B, p(x,y)$: A kümesindeki her x elemanı ve B kümesindeki en az bir y elemanı için $p(x,y)$ önermesi doğrudur (yanlıştır).



16

**Örnek:** $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $p(x,y): x+y=5$ önermesi verilsin.

$\forall x \forall y \, [x+y=5] \longrightarrow Y$

$\forall x \exists y \, [x+y=5] \longrightarrow D$

$\exists x \forall y \, [x+y=5] \longrightarrow Y$

$\exists x \exists y \, [x+y=5] \longrightarrow D$

**Önerme:** $p(x,y)$, $q(x,y)$ açık önermeler olmak üzere

i) $[\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y) \wedge q(x,y)] \equiv [\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)] \wedge [\forall x \in A, \forall y \in B, q(x,y)]$

ii) $[\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y) \wedge q(x,y)] \equiv [\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y)] \wedge [\forall x \in A, \forall y \in B, q(x,y)]$

17

**Örnek:** "$\forall x \in \mathbb{R}\ [x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3 > 0]$" önermesinin doğruluk değerini belirleyerek olumsuzunu yazınız.

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ [x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3 > 0] \equiv \underbrace{(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0)}_{0} \vee \underbrace{(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 3 > 0)}_{0}$$

$$0 \vee 0 \equiv 0$$

$$[\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 < 0 \vee x^2 - 3 > 0)]' \equiv (\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0 \wedge x^2 - 3 \leq 0)$$

**Örnek:** $[p \Leftrightarrow (q \vee r)] \wedge p \wedge r'$ önermesi doğru ise $p, q$ ve $r$ önermelerinin doğruluk değerleri hakkında ne söyleyebilirsiniz?

$$[p \Leftrightarrow (q \vee r)] \wedge p \wedge r' \equiv 1$$



18

$$p \Leftrightarrow (q \vee r) \equiv 1 \quad\Downarrow\quad 1 \Leftrightarrow (q \vee 0) \equiv 1 \quad\Downarrow\quad q \vee 0 \equiv 1 \quad\Downarrow\quad \boxed{q \equiv 1}$$

$$p \wedge r' \equiv 1 \quad\Downarrow\quad \boxed{p \equiv 1} \quad r' \equiv 1 \quad\Downarrow\quad \boxed{r \equiv 0}$$

$$\therefore\ p \equiv 1,\ q \equiv 1,\ r \equiv 0$$

**Örnek:** $p, q, r$ üç önerme olsun. $r$ önermesinin yanlış olduğu bilindiğine göre

$$(r \Rightarrow r') \Leftrightarrow [[(p \vee q)' \wedge p] \vee r']$$

önermesinin doğruluk değeri nedir?

19

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Soyut Matematik

Matematiksel İspatlar Ve Nceleyiciler

Ders 1