ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Permutasyon Grupları

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 12

3.3 Permütasyon Grupları

n elemanlı bir kümenin kendi üzerine 1-1 bir fonksiyonuna bir n-li permütasyon denir. Bütün bu n-li permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir.

Tanım 3.3.1 $f \in S_n$ ve f, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ kümesinin kendi üzerine bir 1-1 fonksiyon olsun. $i_1, i_2, \ldots i_k$; $1, 2, \ldots, n$ nin bir değişik sırada sıralanışı, yani bir permütasyon olmak üzere $f(x_k) = x_{i_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ ise

$$f = \begin{pmatrix} x_1 & & x_n \\ x_{i_1} & & x_{i_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{i_k} \end{pmatrix}$$ ile veya x'leri yazmayarak

$$f = \begin{pmatrix} 1 & & n \\ i_1 & & i_n \end{pmatrix}$$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.2 $f \in S_n$ permütasyonu, $j_1, \dots, j_k$ $(k>1)$ farklı doğal sayılar olmak üzere,
$f(j_1)=j_2$, $f(j_2)=j_3$, $\dots$ $f(j_{k-1})=j_k$, $f(j_k)=j_1$ ile tanımlı ise $f=(j_1 \cdots j_k)$ ile gösterilir ve k uzunluğunda bir devir denir. 1 uzunluğundaki bir devirde özdeşlik fonksiyonu olarak alınır.

Örnek 3.3.3 $f=(1\,3\,7\,9) \in S_{10}$ uzunluğu 4 olan bir devirdir. Burada $f(1)=3$, $f(3)=7$, $f(7)=9$
$f(9)=1$, $f(2)=2$, $f(4)=4$, $f(5)=5$, $f(6)=6$, $f(8)=8$
$f(10)=10$ dur.

Örnek 3.3.4 $f=(1\,3\,7\,9) \in S_{10}$ deviri açık yazılırsa

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 9 & 8 & 1 & 10 \end{pmatrix} \text{dır.}$$

Örnek 3.3.5 I_3 kümesi üzerinde tanımlı bütün permütasyonları yani S_3 ü belirleyelim. $\alpha: I_3 \to I_3$ $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) \end{pmatrix}$ şeklinde ifade edilebilir. O halde

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1) \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23) \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13) \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) \quad \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

şeklinde olup

$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ bulunur.

Teorem 3.3.6: Her n pozitif tam sayısı için S_n fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba simetrik (permütasyon) grup denir.

Not 3.3.7: S_n de çalışırken $f, g \in S_n$ için $f \circ g$ yerine kısaca fg kullanılacaktır.

Tanım 3.3.8: $A \neq \emptyset$ ve $s(A)=n$ olsun. $\sigma \in S(A)$ ve $a \in A$ için $\sigma(a) \neq a$ ise σ, a'yı hareket ettiriyor denir. Ayrıca $\sigma, \rho \in S(A)$ için σ ve ρ nun aynı anda hareket ettirdiği ortak eleman yoksa σ ve ρ permütasyonlarına ayrıktırlar denir.

Örnek 3.3.9 $\sigma=(178)$, $\rho=(239) \in S_9$ için σ ve ρ ayrıktır.

Tanım 3.3.10: $a \in \{1,2,\ldots,n\}$ ve $f \in S_n$ olmak üzere $f^k(a)=1$ şartını sağlayan k pozitif tam sayısı için $\{a\ f(a)\ f(a)^2, \ldots, f(a)^{k-1}\}$ kümesine a nın f permütasyonu altındaki yörüngesi (orbiti) denir.

Teorem 3.3.11 Ayrık iki devirin çarpımı (bileşkesi) değişmelidir.

İspat: $f=(i_1,\dots,i_r)$ ve $g=(j_1,\dots,j_s)$ ayrık iki devir olsun. $n\notin\{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s\}$ ise $f(n)=g(n)=n$ olup $f(g(n))=g(f(n))=n$ bulunur. Eğer $n\in\{i_1,\dots,i_r\}$ ise $f(n)\in\{i_1,\dots,i_r\}$ dir. Şu halde $g(n)=n$ olup $g(f(n))=f(n)$, $f(g(n))=f(n)$ bulunur. Benzer işlemler $n\in\{j_1,\dots,j_s\}$ için de yapılabilir. Şu halde $fg=gf$ dir.

Teorem 3.3.12 r uzunluğundaki bir devirin mertebesi r dir.

İspat: $f=\{i_1,\dots,i_r\}$ r uzunluğunda bir devir olsun.

$1\le k,j\le r$ için $\quad j+k\le r$ ise $f^k(i_j)=i_{j+k}$

$\qquad\qquad\qquad\quad j+k>r$ ise $f^k(i_j)=i_{j+k-r}$ dir.

Buradan $f^r=1$ ve $1\le t<r$ için $f^t\ne 1$ bulunur.

Teorem 3.3.13 S_n deki her permütasyon sıra gözetmeksizin ayrık devirlerin çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: $f\in S_n$ olsun. 1 in f altındaki ardarda görüntülerini alalım. $1, f(1), f^2(1),\dots$ dizisi sonlu olduğundan, belli adımdan sonra tekrar eder. Şu halde $f^k(1)=1$ olacak şekilde en küçük pozitif k tam sayısı var ve $(1\, f(1),\dots f^{k-1}(1))$ birbirinden farklıdır.

Böylece k uzunluğunda $(1\ f(1)\ \ f^{k-1}(1))$ deviri elde edilir. Bu işlem devirde gözükmeyenler içinde yapılırsa elde edilen devirler ayrık ve çarpımları f yi verir.

Örnek 3.3.14 $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ ise

$f = (1)(25)(346)(789)$ dır.

Teorem 3.3.15 $f \in S_n$ permütasyonunun mertebesi, ayrıldığı ayrık devirlerin uzunluklarının ekok dır.

İspat: f nin ayrık devirlere ayrılışı $f = c_1 \cdots c_s$, c_i devirinin uzunluğu t_i ve $\text{ekok}(t_1, \ldots, t_s) = m$ olsun.

$f^m = c_1^m \cdots c_s^m$ dir. Buradan $c_1^m = \cdots = c_s^m = 1$ bulunur. Diğer yondan f nin c_i deki sayılara kısıtlanışı c_i yi verdiğinden $f^n = 1$ olması her $i = 1, \ldots, s$ için $c_i^n = 1$ olmasını gerektirir. $t_i | n$ dir. Böylece $f^n = 1$ olan enküçük pozitif ~~tam~~ sayının $\text{ekok}(t_1, \ldots, t_s) = m$ olduğu görülür.

Örnek 3.3.16 $f = (23)(145)$ permütasyonu için $o(f) = \text{ekok}(2,3) = 6$ olduğu görülür.

Teorem 3.3.17 Her devir 2li devirlerin bir çarpımıdır.

İspat: $(i_1 \dots i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2)$ olduğundan istenen elde edilir.

Örnek 3.3.18 $f = (12345) = (15)(14)(13)(12)$

Tanım 3.3.19 Uzunluğu iki olan bir permütasyona transpozisyon adı verilir.

Not 3.3.20 Bir permütasyonun transpozisyonların çarpımı olarak yazılışı tek türlü değildir. Bu yazılış ayrıldığı 2li devirlerin sayısının teklik ve çiftliğini değiştirmez.

Tanım 3.3.21 Bir permütasyon çift sayıda ikilinin çarpımı ise çift, aksi halde tek permütasyon olarak adlandırılır.

TEŞEKKÜRLER…