ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Altgruplar

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 11

Teorem 3.2.10 Bir grubun bir takım altgrublarının kesişimide bir altgrubtur.

İspat: $\{H_i\}_{i\in I}$ G nin altgrublarının bir ailesi olsun $H=\bigcap_{i\in I} H_i$ diyelim. $\forall a,b\in H$ için $\forall i\in I$, $a,b\in H_i \Rightarrow$ $\forall i\in I$, $ab'\in H_i$, $H_i\leq G \Rightarrow ab'\in H$ bulunur. Teorem 3.2.6 dan $H\leq G$ dir.

Tanım: 3.2.11 G bir grup $S\subseteq G$ olsun $N=\{H \mid H\leq G, S\subseteq H\}$ kümesini gözönüne alalım. $\bigcap_{H\in N} H$ alt grubuna S altkümesiyle üretilen altgrup denir ve $\langle S\rangle=\bigcap_{H\in N} H$ ile gösterilir. Eğer $G=\langle S\rangle$ ise S ye G nin üreteç kümesi denir.

$S=\emptyset$ veya $S=\{e\}$ ise $\langle S\rangle=\{e\}$ dir. Ayrıca $\langle G\rangle=G$ dir.

Scanned with CamScanner

Teorem 3.2.12: G bir grup ve $\emptyset \neq S \subseteq G$ olsun.
$\langle S \rangle = \{ s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n} \mid s_i \in S,\ e_i = \mp 1;\ i = 1,2,\ldots,n;\ n = 1,2,\ldots \}$ dir.

İspat: $A = \{ s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n} \mid s_i \in S,\ e_i = \mp 1;\ i = 1,2,\ldots,n;\ n = 1,2,\ldots \}$ olsun.
$S \neq \emptyset$ olduğundan $A \neq \emptyset$ dir. $\forall a \in A$ için $a = s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n}$ olacak şekilde $s_i \in S$, $e_i = \mp 1$ mevcuttur. $\langle S \rangle$ grup olduğundan $a = s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n} \in \langle S \rangle$ olup $A \subseteq \langle S \rangle$ (1) $\forall s \in S$ için $s = s^1 \in A$ olup $S \subseteq A \Rightarrow \langle S \rangle \subseteq A$ (2) elde edilir. Şimdi A'nın altgrup olduğunu gösterelim. $s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n}$, $p_1^{t_1} \cdots p_r^{t_r} \in A$ olsun.
$(s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n})(p_1^{t_1} \cdots p_r^{t_r})^{-1} = (s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n})(p_r^{-t_r} \cdots p_1^{-t_1}) \in A$ olup
A bir altgruptur.

Scanned with CamScanner

Sonuç 3.2.13 G bir grup ve $a \in G$ olsun bu taktirde $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dir.

İspat: Teorem 3.2.13 den $\langle a \rangle = \{a^{e_1} \cdots a^{e_n} \mid e_i = \mp 1, i = \overline{1,n}, n = 1,2,\dots\}$ dir. $\langle a \rangle = \{a^{e_1 + \cdots + e_n} \mid e_i = \mp 1, i = \overline{1,n}, n = 1,2,\dots\} = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Not 3.2.14 G toplamsal bir grup ise $\langle a \rangle = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Tanım 3.2.15 H ve K bir G grubunun boştan farklı altkümeleri olsunlar. $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ kümesine H ile K kümelerinin çarpımı denir. Özel olarak $H = \{h\}$ ise $\{h\}K = hK$ ile gösterilir. Benzer tanım toplamsal grup içinde yapılabilir.

Teorem 3.2.16 G bir grup $H, K \leq G$ olsun.
$HK \leq G$ olması için gerek ve yeter şart $HK = KH$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $HK \leq G$ olsun. $h \in H$ ve $k \in K$ için $kh \in KH$ olsun
$h = he$, $k = ek$ olduğundan $h, k \in HK$, $HK \leq G$ olduğundan
$kh \in HK$ dır. $KH \subseteq HK$. Diğer yondan $hk \in HK$ olsun.
$HK \leq G$ olduğundan $(hk)^{-1} \in HK$, $h_1 k_1 = (hk)^{-1}$ diyelim.
$hk = ((hk)^{-1})^{-1} = (h_1 k_1)^{-1} = k_1^{-1} h_1^{-1} \in KH$ olup $HK \subseteq KH$ bulunur.
($\Leftarrow$) $HK = KH$ olsun. $h_1 k_1, h_2 k_2 \in HK$ ise

$$(h_1 k_1)(h_2 k_2)^{-1} = (h_1 k_1)(k_2^{-1} h_2^{-1}), \quad (h_2 k_2)^{-1} = k_2^{-1} h_2^{-1} = h_3 k_3 \in HK$$
$$= (h_1 k_1)(h_3 k_3), \quad k_1 h_3 = h_4 k_4 \in HK \ (HK = KH)$$
$$= (h_1 h_4)(k_4 k_3) \in HK$$ olup $HK \leq G$ dir.

Sonuç 3.2.17 G değişmeli bir grup ve $H, K \leq G$ olsun.
Bu durumda $HK \leq G$ dir.

Scanned with CamScanner

Teorem 3.2.18 $H, K \leq G$ olsun. $HK \leq G$ olması için gerek ve yeter şart $HK = \langle H \cup K \rangle$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $HK \leq G$ olsun. $H, K \subseteq HK$ ise $H \cup K \subseteq HK$ dır. $\langle H \cup K \rangle$ nın tanımından $\langle H \cup K \rangle \subseteq HK$ bulunur. Diğer yandan $hk \in HK$ olsun. $H, K \subseteq \langle H \cup K \rangle$ olduğundan $hk \in \langle H \cup K \rangle$ olup $HK \subseteq \langle H \cup K \rangle$ bulunur.

($\Leftarrow$) $HK = \langle H \cup K \rangle$ ise açık.

Teorem 3.2.19 G bir grup ve $S(G)$ G nin bütün alt-gruplarının kümesi olsun "$\leq$" kapsama bağıntısı olmak üzere $(S(G), \leq)$ ikilisi bir kafestir.

İspat: $(S(G), \leq)$ ikilisi bir kısmı sıralı kümedir. $\forall A, B \in S(G)$ için infimum ve supremumun var ve kümeye ait olduğunu göstermeliyiz. Yani $A \vee B, A \wedge B \in S(G)$ olduğunu göstermeliyiz.

CS Scanned with CamScanner

$A, B \in S(G)$ için $A \cap B, \langle A \cup B \rangle \in S(G)$ dir.

$A, B \subseteq \langle A \cup B \rangle$ olup ayrıca $A \subset C, B \subset C, C \in S(G)$ için $\langle A \cup B \rangle \subset C$ olduğundan $\langle A \cup B \rangle$ A ve B için en küçük üst sınır yani $A \vee B = \langle A \cup B \rangle$ dir.

$A \cap B \subseteq A, B$ ve $D \subseteq A, D \subseteq B$ için $D \subseteq A \cap B$ olduğundan $A \cap B$ en büyük altsınır yani $A \cap B = A \wedge B$ dir.

Dolayısıyla $(S(G), \leq)$ kafestir.

TEŞEKKÜRLER…