ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Gruplar Teorisine Giriş İle İlgili Uygulamalar

Arş. Gör. Çağla ÖZYILMAZ

Ders 9

Soru 1: $G = \mathbb{Q} - \{-1\}$ ve $\forall a,b \in G$ için G de $*$ işlemi $a*b = a+b+ab$ ile tanımlansın. $(G,*)$ ikilisi bir grup olur mu?

Çözüm: Bunun için öncelikle $(G,*)$ ikilisinin bir cebirsel yapı olması gerekir.

$G \neq \emptyset$: $G = \mathbb{Q} - \{-1\}$ olduğundan G de sonsuz eleman vardır.

$$* : G \times G \longrightarrow G \quad \text{olsun.}$$
$$(a,b) \longrightarrow *(a,b) = a*b = a+b+ab$$

$*$ kapalıdır: $\forall (a,b) \in G$ için $a \neq -1$ ve $b \neq -1$ dir.

O halde $a*b = a+b+ab \neq -1$ dir. Aksi takdirde

$$a+b+ab = -1 \Rightarrow (a+1) + b(a+1) = 0$$
$$\Rightarrow (a+1)(b+1) = 0$$
$$\Rightarrow a = -1 \text{ veya } b = -1 \text{ olur ki bu bir}$$

çelişkidir. Yani

$\forall (a,b) \in G \times G$ için $a*b \in G$ dir "$*$" kapalıdır

(2)

<u>$*$ iyi tanımlıdır</u>: $\forall (a_1,b_1),(a_2,b_2) \in G\times G$ için $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$ olsun. $\Rightarrow a_1=a_2 \wedge b_1=b_2$

$\Rightarrow a_1+b_1+a_1b_1 = a_2+b_2+a_2b_2$

$\Rightarrow a_1 * b_1 = a_2 * b_2$

$(G,*)$ bir cebirsel yapıdır şimdi de grup öz. bakalım

<u>Birleşme öz</u>: $\forall a,b,c \in G$ için

$$\begin{aligned} a*(b*c) &= a*(b+c+bc) \\ &= a+(b+c+bc)+a.(b+c+bc) \\ &= a+b+c+bc+ab+ac+abc \\ &= a+b+ab+c+(a+b+ab)c \\ &= (a+b+ab)*c \\ &= (a*b)*c \end{aligned}$$

$(G,*)$ birleşme öz sağlar

③

Birim eleman öz : $\forall a \in G$ için

$a * e = a \Rightarrow a + e + ae = a$ ve $e * a = a \Rightarrow e + a + ea = a$

$\Rightarrow e + ae = 0$ $\qquad \Rightarrow e + ea = 0$

$\Rightarrow e(a+1) = 0$ $\qquad \Rightarrow e(1+a) = 0$

$\Rightarrow e = 0 \in G \; (a \neq -1)$ $\qquad \Rightarrow e = 0 \in G \; (a \neq -1)$

G'nin birim elemanı vardır ve 0'dır

Ters eleman öz : $\forall a \in G$ için

$a * a^{-1} = e \Rightarrow a + a^{-1} + a.a^{-1} = 0$ ve $a^{-1} * a = e \Rightarrow a^{-1} + a + a^{-1}.a = 0$

$\Rightarrow a^{-1}(1+a) = -a$ $\qquad \Rightarrow a^{-1}(1+a) = -a$

$\Rightarrow a^{-1} = \dfrac{-a}{1+a} \in G$ $(a \neq -1)$ $a^{-1} \neq -1$ $\qquad \Rightarrow a^{-1} = \dfrac{-a}{1+a} \in G$

$a \neq -1, a^{-1} \neq -1$

O halde $(G, *)$ gruptur

④

Soru 2: $G = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ kümesi üzerinde $\forall (a,b),(c,d) \in G$ için

$$(a,b) * (c,d) = (ac, b+d)$$ ikili işlemi tanımlanıyor. $(G,*)$ ikilisinin bir grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $G = \mathbb{R}-\{0\} \times \mathbb{R}$ olup $G \neq \emptyset$ old. ve "$*$" ikili işlem olduğundan $(G,*)$ bir cebirsel yapıdır

$*$ birleşmelidir; $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in G$ için

$$
\begin{aligned}
[(a,b) * (c,d)] * (e,f) &= (ac, b+d) * (e,f) \\
&= ((ac)e, (b+d)+f) \\
&= (a(ce), b+(d+f)) \\
&= (a,b) * (ce, d+f) \\
&= (a,b) * [(c,d) * (e,f)]
\end{aligned}
$$

Birim eleman ve ters eleman özelliği için $*$ değişmeli mi bakarsak tek aşamada bu öz. gösterebiliriz

$(a,b) * (c,d) = (ac, b+d) = (ca, d+b) = (c,d) * (a,b)$ olduğu kolayca görülür

(5) * birim elemanlıdır: $\forall (a,b) \in G$ için

$$(a,b) * (e_1, e_2) = (a,b) \Rightarrow (a.e_1, b+e_2) = (a,b)$$

$$\Rightarrow ae_1 = a \wedge b+e_2 = b$$

$$\Rightarrow e = (e_1, e_2) = (1,0) \in G$$

* ters elemanlıdır: $\forall (a,b) \in G$ için

$$(a,b) * (c,d) = (e_1, e_2) \Rightarrow (ac, b+d) = (1,0)$$

$$\Rightarrow ac = 1 \ , \ b+d = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{a} \ , \ d = -b$$

$$\Rightarrow (c,d) = \left(\frac{1}{a}, -b\right) \in G$$

O halde $(G,*)$ gruptur

(6)

Soru 3: Gruptaki her elemanın mertebesi 2 ise bu grubun değişmeli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bir $(G,*)$ grubu alalım. $\forall a \in G$ için $a^2 = a*a = e$ olsun. G'nin değişmeli olduğunu yani $\forall a,b \in G$ için $a*b = b*a$ olduğunu gösterelim.

$\forall a,b \in G \Rightarrow a*b \in G$ (kapalılık)

$\Rightarrow (a*b)^2 = e$

$\Rightarrow (a*b)*(a*b) = e$

$\Rightarrow a*(a*b)*(a*b)*b = a*e*b$

$\Rightarrow a^2*(b*a)*b^2 = a*b$

$\Rightarrow e*(b*a)*e = a*b$

$\Rightarrow b*a = a*b$ olup G değişmelidir

(7)

Soru 4 : $(G,*)$ bir grup $a,b \in G$ olsun. $a*b=b*a^{-1}$ ve $b*a=a*b^{-1}$ ise $a^4=b^4=e$ olduğunu gösteriniz

Çözüm : $a*b=b*a^{-1} \overset{\text{Sağdan}}{\Rightarrow} a=b*a^{-1}*b^{-1}$

$b*a=a*b^{-1} \Rightarrow b=a*b^{-1}*a^{-1}$

$b*a=a*b^{-1}=(b*a^{-1}*b^{-1})*b^{-1}=b*a^{-1}*b^{-2}$

$\Rightarrow b*a=b*a^{-1}*b^{-2} \Rightarrow a=a^{-1}*b^{-2}$

$\Rightarrow a*a=a*a^{-1}*b^{-2} \Rightarrow a^2=b^{-2}$

$\Rightarrow a^4=a^2*a^2=a^2*b^{-2}=a*a*b^{-1}*b^{-1}$

$=a*b*a*b^{-1}$

$=b*a^{-1}*a*b^{-1}$

$=b*e*b^{-1}$

$=e$ ve

$a^2=b^{-2} \Rightarrow a^4=b^{-4}$ $\Rightarrow b^4*a^4=b^4*b^{-4}$

$\Rightarrow b^4*e=e$

$\Rightarrow b^4=e$

⑧

Soru 5: $(G, \cdot)$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $a.b$'nin mertebesinin $b.a$'nın mertebesine eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Mertebe tanımına göre a'nın mertebesi $o(a)$ ile gösterilir ve pozitif bir tamsayıdır.

$o(ab) = o(ba)$ old. göstermek için $o(ab) = m$ ve $o(ba) = n$ diyelim. $m | n$ ve $n | m$ old. gösterelim.

$$o(ab) = m \Rightarrow (ab)^m = e$$
$$\Rightarrow (ab)(ab)\dots(ab) = e$$
$$\Rightarrow (ba)^{m-1} \cdot b = a^{-1}$$
$$\Rightarrow (ba)^m = e \quad \Rightarrow n | m \text{ dir} \text{ --- } (1)\dots$$

$$o(ba) = n \Rightarrow \underbrace{(ba)(ba)\dots(ba)}_{n \text{ tane}} = e$$
$$\Rightarrow (ab)^{n-1} \cdot a = b^{-1}$$
$$\Rightarrow (ab)^n = e \quad \Rightarrow m | n \text{ dir} \text{ --- } (2)\dots$$

(1) ve (2) den istenen eşitlik elde edilir

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Arş. Gör. Çağla ÖZYILMAZ

Cebir I

Ders 9