Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Gruplar Teorisine Giriş

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 8

Şimdi bir yarı grubun grup olma şartlarını inceleyelim.

Teorem 3.1.14 $(G,*)$ yarı grubunun grup olması için gerek ve yeter şart

i) $\forall a \in G$ için $e*a=a$ olacak şekilde $e \in G$ olması

ii) $\forall a \in G$ için $b*a=e$ olacak şekilde $b \in G$ olmasıdır.

İspat: $(G,*)$ grup ise açıktır. Tersine $(G,*)$ yarı grubu i ve ii şartlarını sağlasın. $a \in G$ alalım. $b*a=e$, $b \in G$ var

(ii) $b \in G$ için $c*b=e$, $c \in G$ var (ii)

$a=e*a=(c*b)*a=c*(b*a)=c*e$ ve

$a*b=(c*e)*b=c*(e*b)=c*b=e$ old.dan $a*b=b*a=e$ dir.

$a*e=a*(b*a)=(a*b)*a=e*a=a$ olup

$(G,*)$ bir gruptur.

Teorem 3.1.15 $(G,\ast)$ yarı grubunun grup olması için gerekve yeter şart $\forall a,b \in G$ için $a\ast x=b$ ve $y\ast a=b$ olacak şekilde $\exists x,y \in G$ bulunmasıdır.

İspat: $(G,\ast)$ grupsa $x=a^{-1}\ast b$, $y=b\ast a^{-1}$ alınabilir.
Tersine verilen denklemin G'de çözümü olsun. $a\in G$ için $y\ast a=a$ denklemini düşünelim $y=u\in G$ için $u\ast a=a$dır.
$b\in G$ için $a\ast x=b$ denkleminin $c\in G$ çözümü olsun.
$u\ast b=u\ast(a\ast c)=(u\ast a)\ast c=a\ast c=b$ $\forall b\in G$ için $u\ast b=b$ olup Teorem 3.1.14 i şıkkı sağlanır.
$y\ast a=u$ denkleminin $d\in G$ çözümü olsun. $d\ast a=u$ olurki Teorem 3.1.14 ii sağlanır Dolayısıyle Teorem 3.1.14 gereği $(G,\ast)$ ikilisi gruptur.

Teorem 3.1.16 $(G,*)$ sonlu yarı grubunun grup olması için gerek ve yeter şart $(G,*)$da soldan ve sağdan kısaltma özelliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: $(G,*)$ grupsa açık, Tersine $(G,*)$ da kısaltma özellikleri sağlansın. $a,b \in G$ için $a*x=b$ denklemini düşünelim. Bu denklemin G de çözümünün olduğunu göstermeliyiz. $G=\{a_1,\dots,a_n\}$ olsun G yarı grup olduğundan $a\in G$ için $a*a_i\in G$ dir. $i=1,2,\dots,n$ Bu takdirde $\{a*a_1,\dots,a*a_n\}\subseteq G$ $i\neq j$ için $a*a_i=a*a_j$ olsun $a_i=a_j$ elde edilir, bu ise çelişkidir. O halde $G=\{a*a_1,\dots,a*a_n\}$ olur. $b\in G$ için $b=a*a_k$ olacak şekilde $a_k\in G$ vardır. Buda $a*x=b$ denkleminin G'de çözümünün olması demektir. Benzer şekilde $y*a=b$ içinde yapılabilir. Teorem 3.1.15 gereği $(G,*)$ ikilisi gruptur.

Tanım 3.1.17 $(G, *)$ bir grup ve $a \in G$ olsun. $a^n = e$ olacak şekilde n pozitif tam sayılarının en küçüğüne $a \in G$'nin mertebesi denir. Bu mertebe $o(a)$ ile gösterilir. Ayrıca böyle bir n pozitif tam sayısı bulunamıyorsa elemanın mertebesi sonsuzdur denir.

Teorem 3.1.18 $(G,*)$ bir grup $a\in G$ ve $o(a)=n$ olsun.

i) $m\in\mathbb{Z}^+$ için $a^m=e \Leftrightarrow n\mid m$ dir.

ii) Her pozitif t tam sayısı için $o(a^t)=\dfrac{n}{(t,n)}$ dir.

İspat: i) $(\Rightarrow)$ $m\in\mathbb{Z}^+$ için $a^m=e$ olsun $n\nmid m$ ise $m=qn+r$, $0\leq r<n$, $\exists q,r\in\mathbb{Z}$ var. $a^r=a^{m-qn}=a^m*(a^n)^{-q}=e$ çelişkisi elde edilir. $r=0$ olup $n\mid m$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $n\mid m$ ise aşikar.

ii) $o(a^t)=k$ olsun. $a^{tk}=e \Rightarrow n\mid tk \Rightarrow tk=nr$, $r\in\mathbb{Z}$

$(t,n)=d$ olsun. $t=du$, $n=dv$ $(u,v)=1$, $\exists u,v\in\mathbb{Z}$ var

$tk=nr \Rightarrow du.k=d.vr \Rightarrow ku=rv \Rightarrow v\mid ku \Rightarrow v\mid k$

$\Rightarrow v=\frac{n}{d}\mid k$ dır.

$(a^t)^{n/d}=a^{tn/d}=a^{n.du/d}=a^{nu}=e^u=e$ ve $o(a^t)=k$

dan $k\mid n/d$ dolayısıyla $k=n/d$ bulunur.

Örnek 3.1.19 $(\mathbb{Z}_{10}, \oplus)$ ve $(\mathbb{Z}_{10}^*, \odot)$ gruplarının işlem tablosunu yapınız ve $\bar{3} \in \mathbb{Z}_{10}$ ve $\bar{3}^3 \in \mathbb{Z}_{10}^*$ elemanlarının mertebelerini bulunuz.

Teorem 3.1.20 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gruplar olmak üzere $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid 1 \leq i \leq n$ için $a_i \in A_i\}$ kümesi için $A_1 \times \ldots \times A_n$ kümesi üzerinde "." işlemi her $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n$ için

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$$ şeklinde

tanımlanırsa $(A_1 \times \ldots \times A_n, \cdot)$ bir gruptur.

Tanım 3.1.21. Teoremde verilen $A_1 \times \ldots \times A_n$ grubuna $A_1, \ldots, A_n$ gruplarının (dış) direkt çarpımı denir. Eğer $A_1, \ldots, A_n$ grupları toplamsal ise $A_1 \times \ldots \times A_n$ yerine $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ gösterimi de kullanılabilir.

Örnek 3.1.22 $\mathbb{Z}_8^* \times \mathbb{Z}_{10}^*$ grubunu belirleyiniz ve birimini bulunuz.

TEŞEKKÜRLER…