Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Gruplar Teorisine Giriş

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 7

Bölüm 3

3.1 Gruplar

Tanım 3.1.1 G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(G,*)$ cebirsel yapısına grup denir.

G1: $*$ isleminin G de birlesme özelliği vardır. Yani $\forall a,b,c \in G$ için $a*(b*c)=(a*b)*c$ dir.

G2: $*$ isleminin G de birim elemanı vardır. Yani $\forall a \in G$ için $a*e=e*a=a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır.

G3: $*$ islemine göre, G deki her elemanın bir tersi vardır. Yani $a \in G$ için $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ bulunabilir.

Ayrıca sadece G1 sağlanıyorsa yarı grup, G1 ve G2 sağlanıyorsa monoid olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.2 $(G, *)$ bir grup olsun

i) G'de birim eleman tektir.

ii) G'de her elemanın tersi tektir.

İspat: i) Kabul edelim ki e ve e' gibi iki birim olsun

$\forall a \in G$ için e birimse $a * e = e * a = a$ dır.

e' birimse $a * e' = e' * a = a$ dır. Bu iki eşitlik dikkate alınırsa $e = e'$ bulunur.

ii) Kabul edelim ki $a \in G$ nin a' ve a'' gibi iki tersi olsun. Tanımdan $a * a' = a' * a = e$ ve $a'' * a = a'' * a = e$ dir.

$a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a'' = a''$ ve $a' * e = a'$ olup

$a' = a''$ bulunur.

Tanım 3.1.3 $(G,*)$ bir grup ve $\forall a,b \in G$ için $a*b=b*a$ ise gruba değişmeli grup denir.

Tanım 3.1.4 G sonlu bir küme ise $(G,*)$ grubuna sonlu grup denir ve G nin eleman sayısına grubun merkebesi denir $|G|$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.4 $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi toplama işlemine göre değişmeli gruptur.

Örnek 3.1.4 $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ toplama işlemine göre değişmeli gruptur.

Örnek 3.1.5 $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ ve $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ kümeleri çarpma işlemine göre birer değişmeli gruptur.

Örnek 3.1.6 $n > 1$ tam sayısı için $\mathbb{Z}_n$ kümesi $\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b}$ ile tanımlı $\oplus$ işlemine göre $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ ikilisi değişmeli gruptur.

Örnek 3.1.7 $A \neq \emptyset$ olmak üzere $S(A)=\{f: A \to A \mid f, \text{ 1-1 fonkison}\}$
$(S(A), \circ)$ bir gruptur. ($\circ$: bileşke)
Ayrıca $s(A)=n$ ise $S(A)=S_n$ ile gösterilir. $(S_n, \circ)$
ikilisine simetrik grup denir.

Örnek 3.1.8 A kümesinin kuvvet kümesi $P(A)$ olsun.
$\forall X, Y \in P(A)$ için $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ işlemiyle birlikte
$(P(A), \Delta)$ ikilisi değişmeli gruptur.

Teorem 3.1.9 $(G,*)$ bir grup olsun. Bu taktirde

i) $\forall a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dır.

ii) $\forall a,b \in G$ için $(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ dir.

iii) $\forall a,b,c \in G$ için $a*c = b*c$ (veya $c*a = c*b$) ise $a=b$ dir. (sağdan (soldan) kısaltma özelliği)

iv) $\forall a,b \in G$ için $a*x = b$, $y*a = b$ olacak şekilde $\exists x,y \in G$ var ve teklikle belirlidir.

İspat: i) $a \in G$ olsun. G grup olduğundan $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$, $\exists a^{-1} \in G$ var. $a^{-1} \in G$ için $a^{-1}*(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}*a^{-1} = e$ olacak şekilde $(a^{-1})^{-1} \in G$ var. İki eşitlikten $(a^{-1})^{-1} = a$ olur.

ii) $a, b \in G$ olsun.

$$(a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) = ((a*b)*b^{-1})*a^{-1}$$
$$= a*(b*b^{-1})*a^{-1}$$
$$= (a*e)*a^{-1}$$
$$= a*a^{-1} = e$$ Benzer şekilde

$(b^{-1}*a^{-1})*(a*b) = e$ olduğu gösterilebilir. Ayrıca G değişmeli ise $(a*b)^{-1} = a^{-1}*b^{-1}$ olduğu açıktır.

iii) $a, b, c \in G$ için $a*c = b*c$ olsun. Her iki yan c^{-1} ile işleme tabi tutulursa $(a*c)*c^{-1} = (b*c)*c^{-1}$ $\Rightarrow a*(c*c^{-1}) = b*(c*c^{-1}) \Rightarrow a = b$ bulunur. Benzer şekilde $c*a = c*b \Rightarrow a = b$ olduğu gösterilebilir.

iv) $a, b \in G$ olsun. $a * x = b$ denklemi için $x = a^{-1} * b$ alınırsa $a * (a^{-1} * b) = b$ olup çözüm vardır. Benzer şekilde $y * a = b$ içinde bulunur. Şimdi tekliğini gösterelim. $c \in G$ elemanı $a * x = b$ denkleminin başka çözümü olsun. Bu taktirde $a * c = b$ olur.

$c = e * c = (a^{-1} * a) * c = a^{-1} * (a * c) = a^{-1} b$ dir.

Şimdi çarpımsal bir grupta bir elemanın kuvvetini tanımlayalım.

Tanım 3.1.10 G bir grup, $a \in G$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için

$$a^n = \begin{cases} a \ldots a \ (n \text{ defa}), & n>0 \text{ ise} \\ 1, & n=0 \text{ ise} \\ a^{-1} \ldots a^{-1} \ (-n \text{ defa}), & n<0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.11 G bir grup ve $a, b \in G$, $m, n \in \mathbb{Z}^{+}$ için

i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ dir.

ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ dir

iii) G değişmeli grup ise $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ dir.

Tanım 3.1.12 $(G,+)$ bir grup (toplamsal grup) $a \in G$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$na = \begin{cases} a+a+\dots+a \ (n \text{ defa}), & n>0 \text{ ise} \\ 0, & n=0 \text{ ise} \\ (-a)+\dots+(-a) \ (-n \text{ defa}), & n<0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.13 $(G,+)$ bir grup, $a,b \in G$ ve $m,n \in \mathbb{Z}^{+}$ olsun.

i) $ma+na=(m+n)a$ dir

ii) $m(na)=(mn)a$ dir

iii) $n(a+b)=na+nb$ dir.

TEŞEKKÜRLER…