UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler I

Dr.Öğr. Üyesi Fatma Hıra

Ders 10

4 Birinci Mertebeden Yüksek Dereceli Diferansiyel Denklemler

Birinci mertebeden

$$F(x,y,y')=0 \quad ---(4.1)$$

diferansiyel denklemi y' ne göre k. dereceden bir polinom denklem şeklinde ise denkleme k. derecedendir denir. Bu polinom k tane doğrusal çarpana ayrılabileceğinden

$$(y'-f_1(x,y))(y'-f_2(x,y)) --- (y'-f_k(x,y))=0$$

biçiminde yazılabilir. Buradan da

$$y'=f_1(x,y), \quad y'=f_2(x,y), \quad ---, \quad y'=f_k(x,y)$$

birinci mertebeden diferansiyel denklemler elde edilir. Herbirinin integrali alınarak

$$f_1(x,y,c)=0, \quad f_2(x,y,c)=0, \quad --- \quad f_k(x,y,c)=0$$

çözümleri bulunur. Bu fonksiyonların her biri (4.1) denklemini sağladığı gibi bunların çarpımı olan

$$f_1(x,y,c)\,f_2(x,y,c)---f_k(x,y,c)=0 \quad ---(4.2)$$

fonksiyonu da (4.1) denklemini sağlar ve (4.1) denkleminin genel çözümü (4.2) dur.

Örnek: $(y')^2 - xy' - 6x^2 = 0$ (veya $y'^2 - xy' - 6x^2 = 0$ da yazılabilir)

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Denklem 1. mertebeden 2. dereceli lineer olmayan bir denklemdir. Denklemi çarpanlarına ayırırsak

$$y'^2 - xy' - 6x^2 = 0 \Rightarrow (y' - 3x)(y' + 2x) = 0$$ olur. Buradan

$$\quad -3x \quad 2x$$

$$y' - 3x = 0 \quad \text{ve} \quad y' + 2x = 0$$

denklemleri elde edilir

Denklem 2. dereceden olduğu için düzlemin her bir noktasından iki integral eğrisi geçer.

$$y' - 3x = 0 \rightarrow dy = 3x\,dx \Rightarrow y = \frac{3x^2}{2} + c$$

$$y' + 2x = 0 \Rightarrow dy = -2x\,dx \Rightarrow y = -x^2 + c$$

olup verilen denklemin genel çözümü

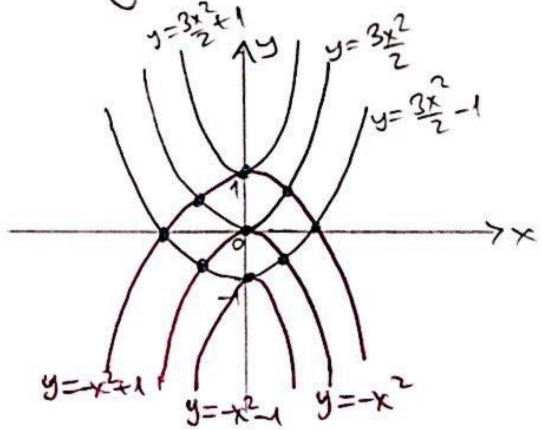
$$\left(y - \frac{3x^2}{2} - c\right)\left(y + x^2 - c\right) = 0$$

şeklinde bulunur.

$c = 0$ için $y = \frac{3x^2}{2}$ ve $y = -x^2$

$c = 1$ için $y = \frac{3x^2}{2} + 1$ ve $y = -x^2 + 1$

$c = -1$ için $y = \frac{3x^2}{2} - 1$ ve $y = -x^2 - 1$



Örnek! $(y'-1)(y'^2-4y)=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$(y'-1)(y'-2\sqrt{y})(y'+2\sqrt{y})=0$ yazılırsa buradan

$y'-1=0 \Rightarrow y'=1 \Rightarrow dy=dx \Rightarrow y=x+c$

$y'-2\sqrt{y}=0 \Rightarrow y'=2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{2\sqrt{y}}=dx \Rightarrow \sqrt{y}=x+c$

$y'+2\sqrt{y}=0 \Rightarrow y'=-2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{2\sqrt{y}}=-dx \Rightarrow \sqrt{y}=-x+c$

bulunur ve genel çözüm

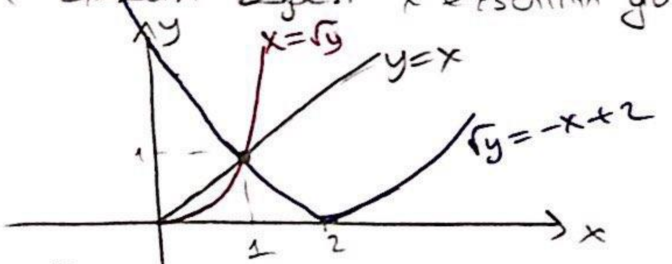
$(y-x-c)(\sqrt{y}-x-c)(\sqrt{y}+x-c)=0$ olur.

Not: Denklemin derecesi 3 olduğundan düzlemin her noktasından 3 tane eğri geçer. ($\sqrt{y}$ olduğundan $y\geq 0$ olacağından çözüm bölgesi x ekseninin yukarısıdır)

(1,1) noktası için $c=0 \Rightarrow y=x$

$c=0 \Rightarrow \sqrt{y}=x$

$c=2 \Rightarrow \sqrt{y}=-x+2$



Not: $y=0$ da denklemin çözümüdür fakat c'ye değer verilerek genel çözümden elde edilemediği için tekil çözümdür.

Şimdi de verilen bir denklemin tekil çözümü varsa nasıl bulunur, bunu inceleyelim.

Tekil Çözüm → p-diskriminantı

$$F(x,y,y')=0 \quad --- (4.3)$$

denklemi verilsin. $y'=p$ gösterimini kullanırsak

$$\left.\begin{aligned} &F(x,y,p)=0 \\ &\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0 \end{aligned}\right\} --- (4.4)$$

sistemini sağlayan (x,y) noktalarının cümlesine (4.3) denkleminin **p-diskriminant eğrileri** denir.

Eğer mümkünse (4.4) denklemleri arasında p yok edilerek, p-diskriminant eğrilerinin $\phi(x,y)=0$ kartezyen denklemi elde edilir. Bu p-diskriminant eğrilerinden diferansiyel denklemi sağlayanlar denklemin **tekil (aykırı, singüler) çözümüdür.**

Örnek: $(y'-1)(y'^2-4y)=0$ denkleminin tekil çözümlerini bulunuz.

p-diskriminant eğrileri $y'=p$ olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,p) &= (p-1)(p^2-4y)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial p} &= p^2-4y+(p-1).2p=0 \end{aligned}\right\}$$

denklemleri arasında p yok edilerek elde edilir. Birinci eşitlikten $p=1$ ve $p^2=4y$ olup bunlar ikinci eşitlikte kullanılırsa

$p=1$ için $\quad 1-4y+0=0 \Rightarrow y=\frac{1}{4}$ bulunur.

$p^2=4y$ için $\quad \cancel{4y-4y}+(2\sqrt{y}-1)\,2.2\sqrt{y}=0 \Rightarrow \sqrt{y}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{4}$

$\sqrt{y}=0 \Rightarrow y=0$ dır.

O halde p-diskriminant eğrileri $y=0$ ve $y=\frac{1}{4}$ dır.

- $y=0$ için $\quad y'=0 \Rightarrow (0-1)(0-4.0)=0$ olup denklem sağlandığı için $y=0$ tekil çözümdür.
- $y=\frac{1}{4}$ için $\quad y'=0 \Rightarrow (0-1)\left(0-4.\frac{1}{4}\right)=(-1)(-1)=1\neq 0$ olup denklem sağlanmadığı için tekil çözüm değildir.

Örnek: $y'^3 - 3x^2y' + 4xy = 0$ denkleminin varsa tekil çözümlerini bulunuz.

p diskriminant eğrileri $y' = p$ olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,p) &= p^3 - 3x^2p + 4xy = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p} &= 3p^2 - 3x^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

denklemleri arasında p yok edilerek elde edilir.

$3p^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow p^2 = x^2 \Rightarrow p = x$ ve $p = -x$ olur.

- $p = x$ için $x^3 - 3x^2x + 4xy = 0 \Rightarrow -2x^3 + 4xy = 0 \Rightarrow 2x(2y - x^2) = 0$
  $\Rightarrow x = 0$ ve $y = \frac{x^2}{2}$ bulunur.

- $p = -x$ için $-x^3 + 3x^3 + 4xy = 0 \Rightarrow 2x^3 + 4xy = 0 \Rightarrow 2x(x^2 + 2y) = 0$
  $\Rightarrow x = 0,\ y = -\frac{x^2}{2}$ bulunur.

O halde $x = 0$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}$ p-diskriminant eğrileridir. Bunlardan hangileri denklemi sağlar onu kontrol edelim:

- $x = 0$ için $y' = \frac{dy}{dx}$ ve $x' = \frac{dx}{dy}$ için $y' = \frac{1}{x'}$ olup denklem

$\frac{1}{x'^3} - 3x^2\frac{1}{x'} + 4x\,y = 0 \Rightarrow 1 - 3x^2x'^2 + 4xy\,x'^3 = 0$ yazılabilir

$x = 0$ için $x' = 0$ olup $1 - 3.0.0 + 4.0.y.0 = 1 \neq 0$ olacağından denklem sağlanmaz. Bu durumda $x=0$ tekil çözüm değildir.

- $y=\frac{x^2}{2}$ için $y'=x$ olup

$$x^3-3x^2\cdot x+4x\cdot\frac{x^2}{2}=-2x^3+2x^3=0$$ olacağından denklem sağlanır.

Bu durumda $y=\frac{x^2}{2}$ tekil çözümdür.

- $y=-\frac{x^2}{2}$ için $y'=-x$ olup

$$-x^3-3x^2(-x)+4x\left(-\frac{x^2}{2}\right)=2x^2-2x^3=0$$ olacağından denklem

sağlanır ve $y=-\frac{x^2}{2}$ de tekil çözümdür.

zarf, c-diskriminant

Düzlemin bir A bölgesinde

$$g(x,y,c) = 0 \quad --- (4.5)$$

bağıntısıyla bir eğri ailesi verilsin. Eğer herbir noktasında (4.5) eğri ailesinin bir eğrisine teğet olan (veya her bir noktasında (4.5) eğri ailesinin bir eğrisiyle ortak bir teğete sahip olan) bir eğri varsa bu eğriye (4.5) eğri ailesinin **zarfı** denir.

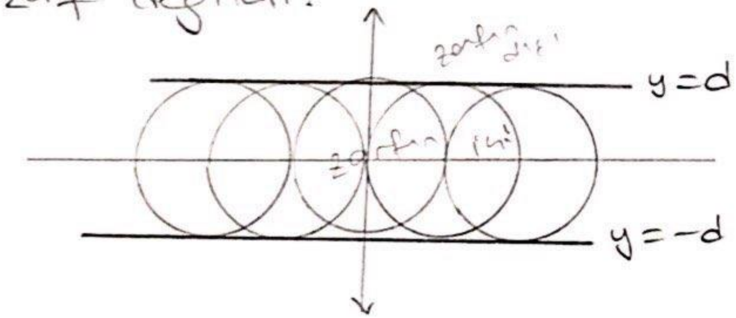
$$\left.\begin{aligned} g(x,y,c) &= 0 \\ \frac{\partial g(x,y,c)}{\partial c} &= 0 \end{aligned}\right\} --- (4.6)$$

sistemini sağlayan (x,y) noktalarının cümlesine **c-diskriminant eğrileri** denir. Bu c-diskriminant eğrileri (4.6) bağıntıları arasında c yok edilerek elde edilir.

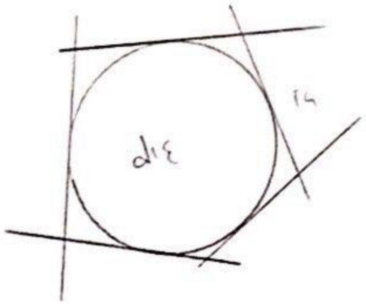
Not: Bir eğri ailesinin her zarfı bir c-diskriminant eğrisidir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani c-diskriminant eğrisi zarf olmak zorunda değildir.

Not: Her zarf bir tekil çözümdür. Fakat her tekil çözüm bir zarf değildir. $z \Rightarrow tç$, $tç$ değilse zarf değil

Not: Bulunan tekil çözüm $g(x,y,c)=0$ eğri ailesinde yerine yazıldığında bu ifade c ye göre çift dereceden katlı kök ise bu tekil çözüm zarf olur. Eğer tek dereceden katlı kök ise zarf değildir.



y=d ve y=-d doğruları çember ailesinin zarfıdır.
(Bu doğrular çemberlerin tamamına teğettir)



Çember teğet doğrularının zarfıdır.

Örnek: $y=(x+c)^2$ eğri ailesinin varsa zarfını bulunuz.

c-diskriminant eğrilerini

$$\left.\begin{aligned} g(x,y,c) &= y-(x+c)^2=0 \\ \frac{\partial g}{\partial c} &= -2(x+c)=0 \end{aligned}\right\}$$ denklemleri arasında c yok edilerek bulunur.

$$-2(x+c)=0 \Rightarrow c=-x \Rightarrow y-(x-x)^2=0 \Rightarrow y=0 \text{ dur.}$$

O halde $y=0$ c-diskriminant eğrisidir (veya c-tekil yeridir). Şimdi bunun tekil çözüm olup olmadığını kontrol edelim: Eğri ailesinin diferansiyel denklemini sağlarsa tekil çözüm dur.

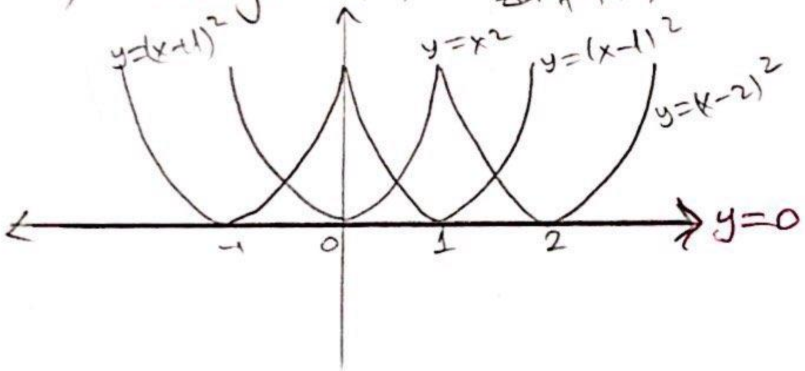
Önce $y=(x+c)^2$ eğri ailesinin denklemini bulalım.

$$y'=2(x+c) \Rightarrow x+c=\frac{y'}{2} \Rightarrow y=\left(\frac{y'}{2}\right)^2 \Rightarrow y'^2-4y=0$$

eğri ailesinin diferansiyel denklemidir.

• $y=0$ c-diskriminant eğrisi için $y'=0$ olup $0^2-4.0=0$ sağlandığından $y=0$ tekil çözümdür. Şimdi de bu tekil çözüm zarf olur mu onu kontrol edelim.

$y=0$ için $0=(x+c)^2 \Rightarrow x=-c$ katlı kök (çift dereceden katlı kök) olduğu için zarftır.



$y=(x+c)^2$

$c=0$ ise $y=x^2$

$c=1$ ise $y=(x+1)^2$

$c=-1$ ise $y=(x-1)^2$

$c=-2$ ise $y=(x-2)^2$

$y=0$ doğrusu (yani x ekseni) $y=(x+c)^2$ parabol ailesindeki tüm parabollere teğet olduğu için bu parabol ailesinin zarfıdır.

Örnek: $y=(x-c)^3+1$ eğri ailesinin varsa zarfını bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} g(x,y,c) &= y-(x-c)^3-1=0 \\ \frac{\partial g}{\partial c} &= -3(x-c)^2(-1)=0 \end{aligned}\right\} \quad c=x \Rightarrow y=1 \text{ c-diskriminant}$$

eğrisidir. $y=1$ tekil çözüm müdür?

$y=(x-c)^3+1$ eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulalım

$y'=3(x-c)^2 \Rightarrow (x-c)^2=\frac{y'}{3}$ ve $(x-c)^3=y-1 \Rightarrow$

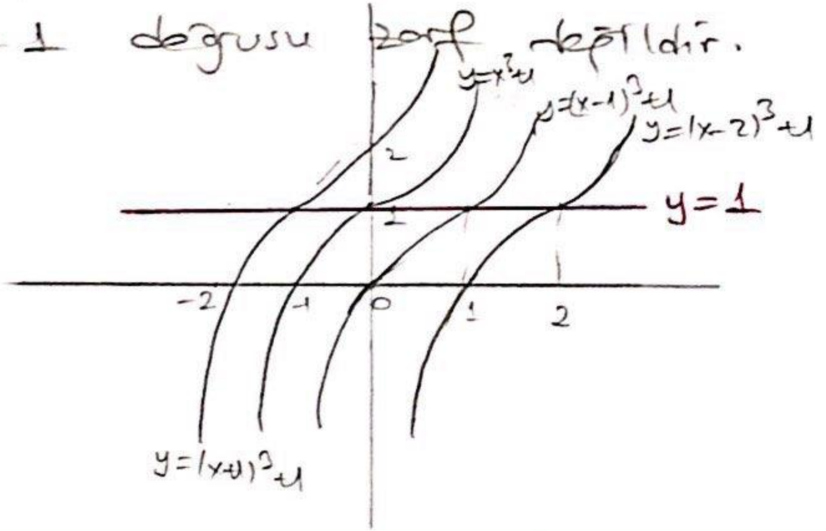
$y = (x-c)^3 + 1$ için $y' = 3(x-c)^2$ dur.

$(x-c)^3 = y-1$ ve $(x-c)^2 = \frac{y'}{3} \Rightarrow (y-1)^2 = \left(\frac{y'}{3}\right)^3 \Rightarrow y'^3 = 27(y-1)^2$

denklemi elde edilir.

- $y = 1$ için $y' = 0$ olup $0 = 27(1-1)^2 \Rightarrow 0 = 0$ sağlanır. O halde $y=1$ tekil çözümdür.

- $y = 1$ için $y = (x-c)^3 + 1 \Rightarrow 1 = (x-c)^3 + 1 \Rightarrow (x-c)^3 = 0$ olup $x = c$ 3 katlı kök (tek dereceden katlı kök) olduğundan $y = 1$ doğrusu zarf değildir.



$y = (x-c)^3 + 1$

$c = 0$ ise $y = x^3 + 1$

$c = 1$ ise $y = (x-1)^3 + 1$

$c = 2$ ise $y = (x-2)^3 + 1$

$c = -1$ ise $y = (x+1)^3 + 1$

$y = 1$ doğrusu $y = (x-c)^3 + 1$ ailesinin büküm noktalarından geçer bunlara teğet değildir o halde zarf değildir.

y ye yada x e Göre Çözülebilen Denklemler

$F(x,y,y')=0$ denklemi yüksek dereceden olduğu zaman y' ne göre açık olarak çözülemez veya y' ne göre lineer çarpanlara ayrılamaz. Bundan dolayı denklemin çözümlerini elde etmek için başka çözüm yolları aranır.

y ye göre çözülebilen denklemler:

$F(x,y,y')=0$ denklemi y ye göre çözülebilsin yani $y'=p$ olmak üzere

$$y=f(x,p) \quad --- \quad (4.7)$$

biçiminde yazılabilsin. (4.7) nin x e göre türevini alalım:

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx} \quad -- \quad (4.8)$$

elde edilir ve bu p ye göre birinci dereceden bir diferansiyel denklemdir. Bilinen yöntemlerle çözümü yapılırsa genel çözümü

$$x=g(p,c)$$

biçimindedir. Bu $y=f(x,p)$ de yerine yazılırsa

$$\left.\begin{array}{l} x = g(p,c) \\ y = f(g(p,c),\, p) \end{array}\right\}$$

şeklinde $y = f(x,p)$ denkleminin p parametresine bağlı parametrik genel çözümü bulunmuş olur. Eğer bu denklemler arasından p yok edilirse

$$h(x,y,c) = 0$$

genel çözümü bulunmuş olur.

Örnek: $xy'^2 - 2yy' + x = 0$ denkleminin çözümlerini (genel ve tekil çözümlerini) bulunuz.

$y' = p$ dersek ve $xp^2 - 2yp + x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{xp^2 + x}{2p}$

$\Rightarrow y = \dfrac{xp}{2} + \dfrac{x}{2p}$ şeklinde y ye göre çözülebilir denklemdir.

x e göre türev alırsak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2} + \frac{x}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{2p} - \frac{x}{2p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$p = \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2p}\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{p^2-1}{\cancel{2}p} = \frac{x(p^2-1)}{\cancel{2}p^2}\frac{dp}{dx} \qquad p = y' \neq 0$$

$$p(p^2-1) = x(p^2-1)\frac{dp}{dx} \Rightarrow (p^2-1)\left(x\frac{dp}{dx} - p\right) = 0$$

$\Rightarrow p^2 = 1$ ve $x\frac{dp}{dx} - p = 0$ olur.

- $x\frac{dp}{dx} - p = 0$, p ye göre birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir

ve çözümü

$$x\frac{dp}{dx} = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln p = \ln x + \ln c \Rightarrow p = cx \text{ olur.}$$

O halde

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{p}{c} \\ y &= \frac{p}{2}\left(\frac{p}{c}\right) + \frac{p}{2cp} \end{aligned}\right\}$$ parametrik genel çözümü bulunur. Buradan p yok edilirse $p = cx$ için

$$y = \frac{cx}{2}\cdot\frac{cx}{\cancel{c}} + \frac{1}{2c} \Rightarrow y = \frac{cx^2}{2} + \frac{1}{2c}$$

genel çözümü bulunur.

• $p^2=1$ den $p=\mp 1$ olup $y=\frac{xp}{2}+\frac{x}{2p}$ de yazılırsa

$y=x$ ve $y=-x$ bulunur.

• $y=x$ için $y'=1$ olup $x.1^2-2x1+x=0$ şeklinde denklemi sağlar ohalde $y=x$ tekil çözümdür.

• $y=-x$ için $y'=-1$ olup $x(-1)^2-2(-x)(-1)+x=0$ şeklinde denklemi sağlar ohalde $y=-x$ tekil çözümdür.

Örnek: $y'^2x^4=y+y'x$ denkleminin genel çözümünü ve varsa tekil çözümünü bulunuz.

$y'=p$ için $p^2x^4=y+px \Rightarrow y=p^2x^4-px$ şeklinde y ye göre çözülmüş denklemdir. x e göre türev alırsak

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p}=4x^3p^2+2px^4\frac{dp}{dx}-p-x\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 0=4x^3p^2-2p+(2px^4-x)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 0=2p(2x^3p-1)+x\frac{dp}{dx}(2px^3-1)$$

$$0=\underbrace{(2x^3p-1)}_{\text{buradan varsa tekil çözüm bulunacak}}\underbrace{\left(2p+x\frac{dp}{dx}\right)}_{\text{buradan genel çözüm bulunacak}}$$

- $2p+x\frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow x\frac{dp}{dx}=-2p \Rightarrow \frac{dp}{p}=-\frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln p=-2\ln x+\ln c$

$\Rightarrow p=\frac{c}{x^2}$ olur.

$$y=p^2x^4-px \Rightarrow y=\frac{c^2}{x^4}x^4-\frac{c}{x^2}x \Rightarrow y=c^2-\frac{c}{x}$$

$\Rightarrow \underline{xy=xc^2-c}$ genel çözümdür

- $2x^3p-1=0 \Rightarrow p=\frac{1}{2x^3}$

$$y=p^2x^4-px \Rightarrow y=\frac{1}{4x^6}x^4-\frac{1}{2x^3}x \Rightarrow y=\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x^2} \Rightarrow y=\frac{1}{4x^2}$$

bulunur. Buradan $y=\frac{1}{4x^2}$ ve $y'=\frac{1}{2x^3}$ için

$y'^2x^4-y-y'x=\frac{1}{4x^6}x^4-\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x^3}x=0$ olacağından $y=\frac{1}{4x^2}$ diferansiyel denklemi sağlar ve tekil çözümdür.

x e göre çözülebilen denklemler:

$F(x,y,y')=0$ denklemi x e göre çözülebilsin yani $y=p$ olmak üzere

$$x=g(y,p) \quad --- (4.9)$$

biçiminde yazılabilsin. Bu durumda (4.9) un y ye göre türevi alınırsa

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{p}$ yazılırsa

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy} \quad --(4.10)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu p ye göre birinci dereceden bir diferansiyel denklemdir ve genel çözümü $y=h(p,c)$ olsun. Bu $x=g(y,p)$ de yerine yazılırsa

$$\left.\begin{array}{l} x=g(h(p,c),p) \\ y=h(p,c) \end{array}\right\}$$

parametrik genel çözüm elde edilir.

Bunlar arasından p parametresi yok edilirse $f(x,y,c)=0$ genel çözümü bulunur.

Örnek: $x=\sin y'$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y'=p$ dersek

$x=\sin p$ olup x e göre çözülmüş denklemdir. Her iki tarafın y ye göre türevini alırsak

$$\frac{dx}{dy}=\cos p\cdot\frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{1}{p}=\cos p\,\frac{dp}{dy} \Rightarrow p\cos p\,dp=dy$$

p ye göre birinci dereceden değişkenlerine ayrılabilir denklem elde edilir. Bunun çözümü ile

$$\int p\cos p\,dp=\int dy$$

$$p\sin p-\int\sin p\,dp=y+c$$

$$p\sin p+\cos p=y+c$$

$\Rightarrow y=p\sin p+\cos p-c$ bulunur. O halde

$$\left.\begin{aligned} x&=\sin p\\ y&=p\sin p+\cos p-c\end{aligned}\right\}$$

parametrik genel çözüm olur. p yok edilirse genel çözüm

$x=\sin p$, $p=\arcsin x$, $\cos p=\sqrt{1-x^2}$ $\Rightarrow$ $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}-c$ bulunur.

Örnek: $y = 2xy' + y^2 (y')^3$ denkleminin genel çözümünü ve varsa tekil çözümünü bulunuz.

$y' = p$ dersek $y = 2xp + y^2 p^3$ dur ve $x = \frac{y}{2p} - \frac{y^2 p^2}{2}$ yazılırsa x e göre çözülmüş denklemdir. y ye göre türev alınırsa

$$\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{1/p} = \frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy} - yp^2 - y^2 p \frac{dp}{dy}$$

$$0 = -\frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy} - yp^2 - y^2 p \frac{dp}{dy}$$

$$0 = -yp^2\left(1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy}\right) - \frac{1}{2p}\left(1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy}\right)$$

$$0 = -\left(1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy}\right)\left(yp^2 + \frac{1}{2p}\right)$$ olup buradan

$1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = 0$ ve $yp^2 + \frac{1}{2p} = 0$ bulunur.

- $1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = -1 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p = -\ln y + \ln c$

$\Rightarrow py = c \Rightarrow y = \frac{c}{p}$ için

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{p}{c} \\ x &= \frac{c}{2p^2} - \frac{c^2}{2} \end{aligned}\right\}$$ parametrik genel çözümü bulunur. Buradan p yok edilerek

$p = yc$ için $x = \dfrac{c}{2y^2c^2} - \dfrac{c^2}{2} \Rightarrow 2xy^2c = 1 - y^2c^3$ genel çözümü bulunur.

• $yp^2 + \dfrac{1}{2p} = 0$ için $yp^2 + \dfrac{1}{2p} = 0$ ve $x = \dfrac{y}{2p} - \dfrac{y^2p^2}{2}$ denklemleri arasında p yok edilirse $y = \dfrac{-1}{2p^3}$ ve $x = \dfrac{-3}{8p^4} \Rightarrow 27y^4 = -32x^3$ bulunur. Bu verilen denklemi de sağladığı için tekil çözümdür.

Tanım: $y = xy' + f(y')$ $\qquad (y = xp + f(p))$

biçiminde yazılabilen bir diferansiyel denkleme **Clairaut denklemi** denir.
Clairaut denklemi y ye göre çözülebilir bir denklemdir. x e göre türev alınırsa

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$\Rightarrow 0 = (x + f'(p))\frac{dp}{dx}$ dur. Buradan $\frac{dp}{dx} = 0$ ve $x + f'(p) = 0$ dır.

- $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$ olup $y = xc + f(c)$ genel çözümü bulunur.

- $x + f'(p) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -f'(p) \\ y = xp + f(p) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{array}\right\}$ zarfın parametrik denklemi

Eğer p yok edilirse $\varphi(x,y) = 0$ şeklinde Clairaut denkleminin zarfı bulunur.

Örnek: $y = y'(x+y')$ denkleminin genel çözümünü ve bu çözüm ailesinin zarfını bulunuz.

$$y = p(x+p) \Rightarrow y = xp + p^2$$ olup Clairaut denklemidir.

Denklemin genel çözümü $p=c$ için $y = xc + c^2$ şeklindedir.

Zarfı bulmak için;

$$\left.\begin{array}{l} g(x,y,c) = y - xc - c^2 = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial c} = -x - 2c = 0 \end{array}\right\}$$

eşitliklerinden c yok edilirse

$c = -\frac{x}{2}$ için

$$y = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2$$

$$y = -\frac{x^2}{4}$$ c-diskriminant eğrisidir.

$y = -\frac{x^2}{4}$ için $y' = -\frac{x}{2}$ olup $-\frac{x^2}{4} = -\frac{x}{2}\left(x - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow -\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$ şeklinde denklem sağlandığı için $y = -\frac{x^2}{4}$ tekil çözümdür.

$y = -\frac{x^2}{4}$ için $-\frac{x^2}{4} = xc + c^2 \Rightarrow 4c^2 + 4cx + x^2 = 0 \Rightarrow (2c+x)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -2c$ katlı kök (çift dereceden kök)

olduğundan $y = -\frac{x^2}{4}$ zarftır.

Örnek: $y'^3 + 3xy' - 3y = 0$ denkleminin çözümlerini bulunuz.

$y' = p$ için

$$p^3 + 3xp - 3y = 0 \Rightarrow y = xp + \frac{p^3}{3}$$ olup Clairaut denklemidir

$p = c$ için genel çözüm

$$y = cx + \frac{c^3}{3}$$ olur.

Tekil çözümü bulmak için; $y = xp + \frac{p^3}{3}$ y ye göre çözülmüş denklem x e göre türev alırsak

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + p^2\frac{dp}{dx} \Rightarrow 0 = (x+p^2)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \text{ ve } x + p^2 = 0$$

yazılabilir.

- $\frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c \Rightarrow y = cx + \frac{c^3}{3}$ genel çözüm bulunur.

- $x + p^2 = 0 \Rightarrow x = -p^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -p^2 \\ y = -\frac{2p^3}{3} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^3 = -p^6 \\ y^2 = \frac{4}{9}p^6 \end{array}\right\} 9y^2 + 4x^3 = 0$

p diskriminant eğrisi tekil çözümdür.

$f(p) = p^3$ $f''(p) = 2p \neq 0$ olup p-diskriminant eğrisi tekil çözümdür.

Tanım: g ve f verilen fonksiyonlar ve $y' = p$ olmak üzere

$$y = x\,g(p) + f(p)$$

formundaki denkleme **Lagrange diferansiyel denklemi** denir. y ye göre çözülebilir bir denklemdir. x e göre türev alınıp düzenleme yapılırsa

$$\frac{dy}{dx} = g(p) + \left(x g'(p) + f'(p)\right)\frac{dp}{dx} \quad , \quad \frac{dp}{dx} \neq 0$$

$$\left(p - g(p)\right)\frac{dx}{dp} = x\,g'(p) + f'(p)$$

şeklinde p bağımsız ve x bağımlı değişkenli bir lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bunun çözümü $\varphi(x,p,c) = 0$ şeklindedir. O halde Lagrange denkleminin genel çözümü parametrik formda

$$\left.\begin{aligned} x &= h(p,c) \\ y &= h(p,c)\,g(p) + f(p) \end{aligned}\right\}$$

olarak bulunur. Buradan p yok edilirse genel çözüm kartezyen formda elde edilir.

- $p - g(p) = 0$ ise buradan tekil çözüm bulunur.

Örnek: $y = x y'^2 + y'^3$ denkleminin çözümlerini bulunuz.

$y' = p$ için $y = x p^2 + p^3$ olup Lagrange denklemidir.

x e göre türev alırsak

$$p = \frac{dy}{dx} = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx} \Rightarrow p - p^2 = (2px + 3p^2)\frac{dp}{dx}$$

$p - p^2 \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{dx}{dp} - \dfrac{2}{1-p}x = \dfrac{3p}{1-p}$ lineer denklemi elde edilir. Bunun genel çözümü

$$x = \frac{\frac{3}{2}p^2 - p^3 + c}{(1-p)^2}$$

olup verilen Lagrange denkleminin genel çözümü

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\frac{3}{2}p^2 - p^3 + c}{(1-p)^2} \\ y &= \frac{\frac{3}{2}p^2 - p^3 + c}{(1-p)^2}p^2 + p^3 \end{aligned}\right\}$$

parametrik formda bulunur.

- $p - p^2 = 0$ ise $p(1-p) = 0 \Rightarrow p = 0$ ve $p = 1$ olup buradan

$$\left.\begin{aligned} p = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ p = 1 &\Rightarrow y = x + 1 \end{aligned}\right\}$$

tekil çözümleri bulunur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Diferansiyel Denklemler I

Dr.Öğr. Üyesi Fatma Hıra

Ders 10