ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Temel Kavramlarla ilgili uygulamlar

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 6

Temel Kavramlar ile İlgili Uygulamalar

①

Soru: $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ için $(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$ biçiminde tanımlanan "$\sim$" bir denklik bağıntısı olur mu? Gösteriniz. Eğer "$\sim$" denklik bağıntısı ise $(2,3)$'ün denklik sınıfını bulunuz.

Çözüm: Yansıma: $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ için $ab = ba$ olduğundan $(a,b) \sim (a,b)$ yazılır. Yani "$\sim$" yansımalıdır.

Simetri: $(a,b) \sim (c,d)$ sağlayan $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ için $(c,d) \sim (a,b)$ olur mu?

$(a,b) \sim (c,d) \Longrightarrow ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$

olup "$\sim$" simetriktir.

Geçişme: $(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f)$ sağlayan $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ için $(a,b) \sim (e,f)$ olur mu?

$$\left.\begin{array}{l} (a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = bc \\ (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow cf = de \end{array}\right\} \text{Taraf tarafa çarpılırsa} \Longrightarrow ad\,cf = bcde$$

$\Longrightarrow af = be$

$\Longrightarrow (a,b) \sim (e,f)$ olup

"$\sim$" geçişmelidir.

Bu üç özellik sağlandığından "$\sim$" denklik bağıntısıdır.

O halde $(2,3)$'ün denklik sınıfını bulalım.

$$\overline{(2,3)} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : (a,b) \sim (2,3)\}$$
$$= \{(a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : 3a = 2b\}$$
$$= \{(2k,3k) \mid k \in \mathbb{Z}^+\} = \{(2,3),(4,6),(6,9),\dots\}$$

Soru: Sonlu kümelerin oluşturduğu bir aile P olsun. $\forall A, B \in P$ için ②
" $A \sim B \Leftrightarrow \exists f : A \to B \ni f$; birebir ve örten fonksiyon "
biçiminde tanımlanan $\sim$ bir denklik bağıntısı mıdır? Gösteriniz.
Eğer $\sim$ bir denklik bağıntısı ise P ailesi $X = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin kuvvet kümesi $P = P(X)$ olarak seçilirse $D = \{1, 2\} \in P(X)$ elemanının denklik sınıfını bulunuz.

Çözüm: . Yansıma : $\forall A \in P$ için $A \sim A$ olur mu?
$f : A \to A$ özdeşlik fonksiyonu olarak seçilirse bu fonksiyon birebir ve örten olduğundan $A \sim A$ dır.

. Simetri : $A \sim B$ olacak şekilde $\forall A, B \in P$ için $B \sim A$ olur mu?
$A \sim B \Rightarrow \exists f : A \to B \ni f$, birebir ve örtendir. O halde ilgili teoreme göre f'nin tersi vardır ve f'nin tersi de birebir ve örtendir. Yani $f^{-1} = g$ denilirse $\exists g : B \to A$ birebir ve örten fonksiyonu vardır. $B \sim A$ olup "$\sim$" simetriktir.

Geçişme : $A \sim B \wedge B \sim C$ sağlayan $\forall A, B, C \in P$ için $A \sim C$ olur mu?

(3)

$A \sim B \Rightarrow \exists f : A \longrightarrow B \ni f$ birebir ve örten

$B \sim C \Rightarrow \exists g : B \longrightarrow C \ni g$ birebir ve örten

$h = g \circ f$ denilirse ilgili teoreme göre f ve g birebir ve örten ise $g \circ f$ da birebir ve örten olduğundan

$\exists h : A \longrightarrow C$ birebir ve örten fonksiyonu vardır $A \sim C$ olup "$\sim$" geçişmelidir.

O halde "$\sim$" denklik bağıntısıdır. Şimdi de D'nin denklik sınıfını bulalım.

$$\overline{D} = \{ C \in P(X) : C \sim D \}$$
$$= \{ C \in P(X) : \exists f : C \longrightarrow D \ni f \text{ birebir ve örten} \}$$
$$= \{ C \in P(X) : C \subseteq X, |C| = 2 \}$$
$$= \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \}$$

Soru : $A = \{(1,2),(1,5),(2,6),(3,5),(4,10)\}$ kümesi üzerinde (4)
$\forall (x,y),(z,t) \in A$ için $(x,y)\,\beta\,(z,t) \iff x \mid z$ ve $y \le t$ biçiminde
β sıralama bağıntısı tanımlanıyor. A kümesinin maksimal, minimal
en büyük, en küçük ve supremum, infimum elemanlarını
varsa belirleyiniz.

Çözüm : Kolaylık olması açısından β bağıntısına göre A kümesinin birbiriyle bağlantılı olan elemanlarını aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$\begin{tikzcd}
 & & & (4,10) \\
(3,5) & & (2,6) \arrow[ur] & \\
 & (1,5) \arrow[ul] \arrow[ur] & & \\
 & (1,2) \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Buna göre
Mak $A = \{(3,5),(4,10)\}$
Min $A = \{(1,2)\}$
EBE A yoktur
EKE $A = (1,2)$

Maksimal, minimal, en büyük, en küçük elemanlar kümeye ait olmak zorunda iken supremum ve infimum elemanların böyle bir zorunluluğu yoktur. Supremum üst sınırların en küçüğü olduğundan $\text{Sup } A = (12,10)$, infimum alt sınırların en büyüğü old. $\text{Inf } A = (1,2)$ dir

Soru: $f: A \to B$ ve $g: C \to D$ iki fonksiyon ve (5)

$$h: A \times C \longrightarrow B \times D$$
$$(x,y) \longmapsto (f(x), g(y))$$

ile tanımlanan bir fonksiyon olsun. f ve g birebir ve örten ise h birebir ve örten olur mu? Araştırınız.

Çözüm: h birebir olur mu?

$\forall (x,y),(z,t) \in A \times C$ için

$$h(x,y) = h(z,t) \Rightarrow (f(x), g(y)) = (f(z), g(t))$$
$$\Rightarrow f(x) = f(z) \wedge g(y) = g(t)$$
$$\Rightarrow x = z \wedge y = t$$
$$\Rightarrow (x,y) = (z,t)$$ olup h birebirdir

h örten olur mu?

$\forall (b,d) \in B \times D$ için $\Rightarrow b \in B \wedge d \in D$

$$\Rightarrow f(x) = b \wedge g(y) = d \text{ oş } \exists x \in A, \exists y \in C$$
$$\Rightarrow h(x,y) = (f(x), g(y)) = (b,d) \text{ oş } \exists (x,y) \in A \times C$$

var olduğundan h örtendir

Soru: $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere $C \subseteq Y$ için 6

$f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Keyfi bir $x \in X \setminus f^{-1}(C)$ alalım

$$x \in X \setminus f^{-1}(C) \iff x \in X \wedge x \notin f^{-1}(C)$$
$$\iff x \in X \wedge f(x) \notin C$$
$$\iff f(x) \in Y \wedge f(x) \notin C$$
$$\iff f(x) \in Y \setminus C$$
$$\iff x \in f^{-1}(Y \setminus C) \text{ olup}$$

$f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ bulunur.

7

Soru: $f: X \to Y$ ve $A \subseteq X$ olsun. $f|_A = g$, $B \subseteq Y$ için $g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$ olduğunu gösteriniz

Çözüm: Kısıtlanmış fonksiyon tanımı gereği $f|_A = g$ ise $g: A \to Y$ $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ yazılır

Keyfi bir $x \in g^{-1}(B)$ alalım.

$$x \in g^{-1}(B) \iff x \in A \wedge g(x) \in B$$
$$\iff x \in A \wedge f(x) \in B$$
$$\iff x \in A \wedge x \in f^{-1}(B)$$
$$\iff x \in A \cap f^{-1}(B)$$ olup x keyfi olduğundan

$g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$ elde edilir

Soru: $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde tanımlanan (8)

$$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(x, y) \longrightarrow x+y-xy$$

işleminin birleşme özelliğine sahip olduğunu gösteriniz

Çözüm: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned}
x*(y*z) &= x*(y+z-yz) \\
&= x+(y+z-yz)-x\cdot(y+z-yz) \\
&= x+y+z-yz-xy-xz+x(yz) \\
&= x+y-xy+z-xz-yz+xyz \\
&= (x+y-xy)+z-(x+y-xy)z \\
&= (x+y-xy)*z \\
&= (x*y)*z \quad \text{olup "}*\text{" birleşmelidir}
\end{aligned}$$

Soru: $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ için $(a,b) \circ (c,d) = (a+c, bd)$ biçiminde tanımlanan "o" ikili işleminin özelliklerini inceleyiniz (9)

Çözüm: (i) Değişme öz: $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ için

$(a,b) \circ (c,d) = (a+c, bd) = (c+a, db) = (c,d) \circ (a,b)$ olup

dan "o" değişmelidir

(ii) Birleşme öz: $\forall (a,b),(c,d),(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ için

$$
\begin{aligned}
[(a,b) \circ (c,d)] \circ (e,f) &= (a+c, bd) \circ (e,f) \\
&= ((a+c)+e, (bd)f) \\
&= (a+(c+e), b(df)) \\
&= (a,b) \circ (c+e, df) \\
&= (a,b) \circ [(c,d) \circ (e,f)] \text{ olup}
\end{aligned}
$$

"o" birleşmelidir

(iii) Birim (Etkisiz) eleman öz. : $\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ için

$(a,b) \circ (e_1, e_2) = (a,b)$ olacak şekilde $(e_1, e_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

var mı?

$$(a,b) \circ (e_1, e_2) = (a,b) \Longleftrightarrow (a+e_1, be_2) = (a,b)$$
$$\Longleftrightarrow a+e_1 = a \ , \ be_2 = b$$
$$\Longleftrightarrow e_1 = 0 \ \wedge \ e_2 = 1$$
$$\Longleftrightarrow (e_1, e_2) = (0,1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \text{ olup}$$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$'in "o" işlemine göre birim elemanı $(0,1)$ dir.

(iv) Ters eleman öz. : $\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ için

$(a,b) \circ (u,v) = (0,1)$ o.ş. $\exists (u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ var mı?

Örneğin $(1,3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ için

$$(1,3) \circ (u,v) = (0,1) \Longleftrightarrow (1+u, 3v) = (0,1)$$
$$\Longleftrightarrow 1+u = 0 \ \wedge \ 3v = 1$$
$$\Longleftrightarrow u = -1 \in \mathbb{Z} \ \wedge \ v = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}^*$$

olup "o" işleminin ters eleman özelliği yoktur

Soru: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ üzerinde, $(a,b) \odot (c,d) = (a+c, 2^d . b + c)$ ile tanımlanan işlemin bir ikili işlem olup olmadığını belirtiniz. (11)

Çözüm: ikili işlem olması için "$\odot$"nın kapalı ve iyi tanımlı olması gerekir.

$\odot$:

$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ için $a,c \in \mathbb{Z}$, $b,d \in \mathbb{Q}$ olup

$(a,b) \odot (c,d) = (a+c, 2^d . b+c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ olur mu?

$\forall d \in \mathbb{Q}$ için $2^d \notin \mathbb{Q}$ olduğundan $2^d b+c \notin \mathbb{Q}$ dur

Kapalılık sağlanmaz. O halde "$\odot$" işlemi ikili işlem değildir

Soru : $(m,n)=1$ ise $(m+n, m-n)=1$ veya 2 olduğunu gösteriniz

Çözüm : $(m+n, m-n)=d$ olsun $d=1$ veya $d=2$ olduğunu gösterelim.

Ebob tanımına göre $d \mid m+n \wedge d \mid m-n$ olur.

O halde $d \mid m+n+m-n \quad \wedge \quad d \mid m+n-m+n$

$\Rightarrow \quad d \mid 2m \quad \wedge \quad d \mid 2n$

$\Rightarrow \quad d \mid (2m, 2n)$

$\Rightarrow \quad d \mid 2$

$\Rightarrow \quad d = \mp 1, \mp 2$, d ebob olduğundan negatif olamaz. O halde $(m+n, m-2)=1$ veya 2 dir

(12)

Soru: $a|c$ ve $b|c$; $(a,b)=d$ ise $ab|cd$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a|c \Rightarrow c=a.k_1$ o.ş $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$ var

$b|c \Rightarrow c=b.k_2$ o.ş $\exists k_2 \in \mathbb{Z}$ var

$(a,b)=d$ ise $d=ax+by$ o.ş $\exists x,y \in \mathbb{Z}$ vardır

$$cd = c.(ax+by) = c.(ax)+c.(by)$$
$$=(bk_2)(ax)+(ak_1)(by)$$
$$= ab\,(\underbrace{k_2x+k_1y}_{k\in\mathbb{Z}}) \text{ olup}$$

$cd=ab.k$;$(k=k_2x+k_1y)$ o.ş $\exists k\in\mathbb{Z}$ vardır

Yani $ab|cd$ elde edilir

Soru: 1476 ve 1644 sayılarının ebobunu bulunuz ve (13)
$(1476,1644) = 1476x + 1644y$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$
belirleyiniz.

Çözüm :

$$1644 = 1.1476 + 168$$
$$1476 = 8.168 + 132$$
$$168 = 1.132 + 36$$
$$132 = 3.36 + 24$$
$$36 = 1.24 + 12$$
$$24 = 2.12 + 0 \Rightarrow (1476,1644) = 12$$

Tersten gidelim

$$12 = 36 - 1.24 = 36 - 1.(132 - 3.36)$$
$$= 4.36 - 1.132$$
$$= 4.(168 - 132) - 1.132$$
$$= 4.168 - 5.132$$
$$= 4.168 - 5(1476 - 8.168)$$
$$= 44.168 - 5.1476$$
$$= 44(1644 - 1476) - 5.1476$$
$$= 44.1644 - 49.1476 \Rightarrow x = -49,\ y = 44 \text{ bulunur}$$

Soru: $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $2.5^{3n+2} + 7^{2n+1}$ sayısının 19 ile bölümünden kalanı bulunuz. (14)

Çözüm: $5^3 = 125 \equiv 11 \pmod{19}$ ve $7^2 = 49 \equiv 11 \pmod{19}$

$5^{3n} \equiv 11^n \pmod{19}$ $\qquad 7^{2n} \equiv 11^n \pmod{19}$

$5^{3n+2} \equiv 11^n . 25 \equiv 6.11^n \pmod{19}$ $\qquad 7^{2n+1} \equiv 7 11^n \pmod{19}$

$2.5^{3n+2} \equiv 12 11^n \pmod{19}$

$$2.5^{3n+2} + 7^{2n+1} = 12.11^n + 7.11^n$$
$$= 19.11^n \pmod{19}$$
$$\equiv 0 \pmod{19}$$ olduğundan

19 ile bölümünden kalan "0" dır. Yani bu sayının tam bölünür

Soru : $x^2 \equiv 1 \ (8)$ denkliğinin çözümünü bulunuz (15)

Çözüm : $x^2 \equiv 1 \ (8) \iff 8 \mid x^2 - 1$

$\iff x^2 - 1 = 8k$ o.ş $k \in \mathbb{Z}$

$\iff x^2 = 8k + 1$ o.ş $k \in \mathbb{Z}$

$\iff x^2$ bir tek tamsayıdır

$\iff x$ bir tek tamsayıdır

$\mathbb{Z}_8$ deki tek tamsayılar $\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}$ olduğuna göre Çözüm kümesi $= \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ bulunur

Soru: 72^{7272} sayısının 41 ile bölümünden kalan kaçtır? (16)

Çözüm: $72^{7272} \equiv x \ (41)$

$(72,41)=1$ olduğundan Euler Teoremine göre

$72^{\phi(41)} \equiv 1 \ (41) \Rightarrow 72^{40} \equiv 1 \ (41)$

$\Rightarrow 31^{40} \equiv 1 \ (41)$

$72^{7272} \equiv 31^{7272} \equiv (31^{40})^{181} \, 31^{32} \equiv 31^{32}$ ise biz

$31^{32} \equiv x \ (41)$ denkliğinden x'i bulmalıyız

$31 \equiv -10 \ (41)$ olduğundan

$(-10)^{32} \equiv x \ (41)$

$(-10)^{5} \equiv -1 \ (41)$

$(-10^{5})^{6} = (-10)^{30} \equiv 1 \ (41)$

$(-10)^{32} \equiv (-10)^{30} (-10)^{2} \equiv 100 \equiv 18 \ (41)$

$72^{7272} \equiv 18 \ (41)$ bulunur

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Şenol EREN

Cebir I

Ders 6