ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Temel Kavramlar

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 2

1.2 FONSİYONLAR

Tanım 1.2.1 A ve B boş olmayan kümeler ve f, A dan B ye bir bağıntı olsun. $\forall a \in A$ için, a ya f ile bağlı B de bir ve yanlız bir eleman bulunabilirse, f ye A dan B ye bir fonksiyon denir, ve $f: A \longrightarrow B$ ile gösterilir. A'ya f nin tanım kümesi B ye f nin değer kümesi denir. a ya f fonksiyonu ile karşılık gelen ve tek türlü olarak belirli olan b elemanı $f(a)=b$ ile gösterilir ve b'ye f altında a nın görüntüsü denir.

$f: A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ise $A \times B$ nin

$\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ alt kümesine f nin grafiği

denir.

Örnek 1.2.2 $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$m \longrightarrow f(m) = m^2$ bir fonksiyon olup görüntü kümesi $\{m^2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Tanım 1.2.3 f ve g, A dan B içine iki fonksiyon ve $\forall a \in A$ için $f(a) = g(a)$ ise f ve g ye eşit fonksiyonlar denir ve $f = g$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.4 $f: A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun. A nın birbirinden farklı herhangi iki elemanının görüntüleri de farklı ise f ye bire bir fonksiyon denir ve $f: A \longleftrightarrow B$ ile gösterilir.

$f: A \longleftrightarrow B \Longleftrightarrow \forall a_1, a_2 \left[a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \right]$ veya

$f: A \longleftrightarrow B \Longleftrightarrow \forall a_1, a_2 \left[f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \right]$

Tanım 1.2.5 $f: A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Her bir $b \in B$ için $f(a)=b$ olacak şekilde bir $a \in A$ varsa $f$ye örten fonksiyon denir ve $f: A \twoheadrightarrow B$ ile gösterilir.

$f: A \twoheadrightarrow B \iff \forall b \in B$ için $\exists a \in A\ [f(a)=b]$.

Tanım 1.2.6 $A \neq \emptyset$ olsun. $\forall a \in A$ için $f(a)=a$ ile tanımlanan $f: A \longrightarrow A$ fonksiyonuna özdeşlik veya birim fonksiyon denir ve I_A ile gösterilir.

$I_A: A \longleftrightarrow A$, $I_A: A \twoheadrightarrow A$ ve $\{(a,a) \mid a \in A\}$ dır.

Tanım 1.2.7 A ve B kümeleriyle bir $b_0 \in B$ verilmiş olsun. $\forall a \in A$ için $f(a)=b_0$ ile tanımlanan $f: A \longrightarrow B$ fonksiyonuna sabit fonksiyon denir.

Tanım 1.2.8 Bir $f: A \longrightarrow B$ fonksiyonu verilmiş olsun.

i) Bir $C \subseteq A$ için $f(C) = \{ f(a) \mid a \in C \} \subseteq B$ alt kümesine, C nin f altındaki görüntüsü denir.

ii) Bir $D \subseteq B$ için $f^{-1}(D) = \{ a \in A \mid f(a) \in D \} \subseteq A$ alt kümesine, D nin f altındaki trs görüntüsü denir.

Tanım 1.2.9 $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ iki fonksiyon olsun. $\forall a \in A$ için $h(a) = g(f(a))$ ile tanımlı $h: A \longrightarrow C$ fonksiyonuna f ile g nin bileşkesi denir ve $h = g \circ f$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.10 $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $g(x) = [\![x]\!]$ ve $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $f(x) = x^2$ ise $f \circ g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(f \circ g)(x) = f([\![x]\!]) = [\![x]\!]^2$ ile tanımlıdır.

Teorem 1.2.11 $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, $h: C \longrightarrow D$ üç fonksiyon ise $ho(gof) = (hog)of$ dir. (Bileşkenin birleşme özelliği)

Tanım 1.2.12 $f: A \longrightarrow B$ birebir ve örten fonksiyon ise $\forall b \in B$ elemanına $f(a) = b$ olacak şekilde (tek türlü belirli olan) bir $a \in A$ elemanı karşılık getirilerek B den A ya tanımlanan foksiyona f nin ters fonksiyonu denir ve $f^{-1}: B \longrightarrow A$ ile gösterilir.
Şu halde f 1-1 ve örten ise $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ dır. Ayrıca $f^{-1} o f = I_A$ ve $f o f^{-1} = I_B$ dir.

Teorem 1.2.13 $f: A \longrightarrow B$ ve $g: B \longrightarrow C$ verilsin.

i) f ve g örten ise gof de örten

ii) f ve g 1-1 ise gof de birebirdir.

Teorem 1.2.14 A kümesinin kendi üzerine 1-1 ve örten bütün fonksiyonlar kümesi $S(A)$ olsun.

i) $f, g \in S(A)$ ise $g \circ f \in S(A)$ dır.

ii) $f, g, h \in S(A)$ ise $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ dır.

iii) I_A birim fonksiyon olmak üzere
$\forall f \in S(A)$ için $I_A \circ f = f \circ I_A = f$ dir.

iv) $\forall f \in S(A)$ için $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A$ olacak şekilde bir $f^{-1} \in S(A)$ bulunabilir.

Tanım 1.2.15 $A \times A$ dan A ya bir fonksiyona A da bir ikili işlem denir. $*$, A da bir ikili işlem ve $a, b \in A$ olsun. (a, b) nin $*$ altındaki görüntüsünü $a * b$ ile gösterelim.

i) $\forall a, b \in A$ için A'da bir $a * b$ elemanı var ve

ii) Bu eleman tek türlü belirlidir.

Bu özelliklerden birincisine işlemin kapalılığı, ikincisine iyi tanımlılığı denir.

Örnek 1.2.16 $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde $(a,b) \longrightarrow a+b$ ve $(a,b) \longrightarrow a.b$ ile tanımlı adi toplama ve adi çarpma işlemleri birer ikili işlemdir.

Tanım 1.2.17 Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlı boş olmayan bir kümeye cebirsel yapı denir. A kümesi üzerinde bir $*$ ikili işlemi tanımlı ise bu cebirsel yapı $(A, *)$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.18 $(\mathbb{N}, +)$ ve $(\mathbb{N}, \cdot)$ birer cebirsel yapıdır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Şenol EREN

Cebir I

Ders 2