ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

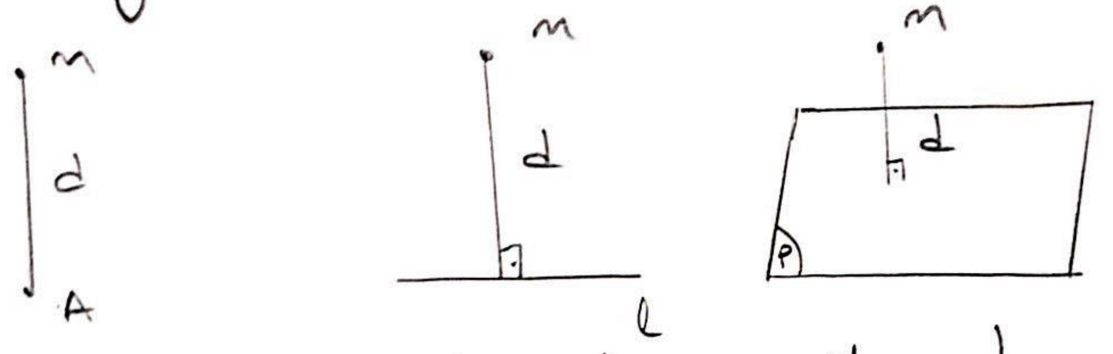
Moment ve Ağırlık Merkezi

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Ders 15

Moment ve ağırlık merkezi

Tanım: Bir parçacığın kütlesi ile bir nokta, eksen veya düzleme olan uzaklığının çarpımına nokta, eksen veya düzleme göre momenti denir.



$M = md$ $\qquad$ $M = md$ $\qquad$ $M = md$

Cisim bir parçacık değil de kütleleri $m_1, m_2, \dots, m_n$ olan bir sistem ise herbir parçacığın nokta, eksen veya düzleme uzaklığı, sırasıyla, $d_1, d_2, \dots, d_n$ olmak üzere sistemin momenti

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k d_k$$

olur

Eğer cisim bir eğri parçası, bir düzlem parçası veya bir katı cisim ise momenti sonlu toplam şeklinde hesaplayamayız.

Tanım: Bir eğri parçasının kütlesinin yay uzunluğuna göre değişim oranı

$$\sigma = \frac{dm}{ds}$$

ye yoğunluk fonksiyonu denir.

Levha için yoğunluk fonksiyonu $\sigma = \dfrac{dm}{dA}$ ve katı cisim için yoğunluk fonksiyonu $\sigma = \dfrac{dm}{dV}$ dir.

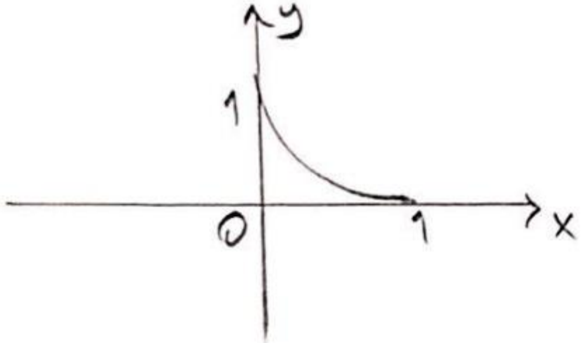
O halde bir $y=f(x)$ eğrisinin $[a,b]$ aralığı üzerinde parçasının kütlesi

$$m = \int_a^b \sigma \, ds = \int_a^b \sigma \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

ile hesaplanır.

Benzer şekilde bir levhanın kütlesi $m = \int \sigma(x)\, dA$ ile hesaplanır.

Örnek: $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ eğrisinin 1. bölgedeki parçası üzerine yerleştirilmiş bir telin her noktadaki yoğunluğu o noktanın apsisinin karesine eşittir. Bu telin kütlesini bulalım.



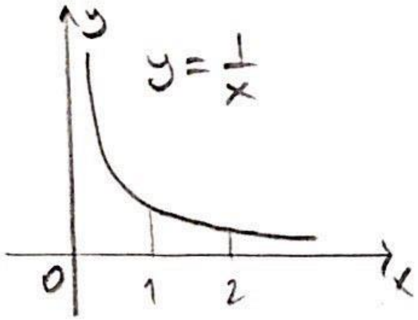
$$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$$\Rightarrow m=\int_0^1 \sigma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1 x^2\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx$$

$$=\int_0^1 x^2\sqrt{\frac{\cancel{x^{2/3}}+1-\cancel{x^{2/3}}}{x^{2/3}}}\,dx=\int_0^1 \frac{x^2}{x^{1/3}}\,dx$$

$$=\int_0^1 x^{5/3}\,dx=\frac{3}{8}x^{8/3}\Big|_0^1=\frac{3}{8}.$$

Örnek: $y=\frac{1}{x}$ eğrisi, $x=1$, $x=2$ doğruları ve x ekseni tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen bir levhanın her noktada yoğunluğu, o noktanın apsisinin 2 katıdır. Levhanın kütlesini bulalım.



$\sigma(x)=2x$

$$m=\int_1^2 \sigma(x)\,dA=\int_1^2 2\cancel{x}\,\frac{1}{\cancel{x}}\,dx=2x\Big|_1^2=4-2=2.$$

Bir eğrinin momenti

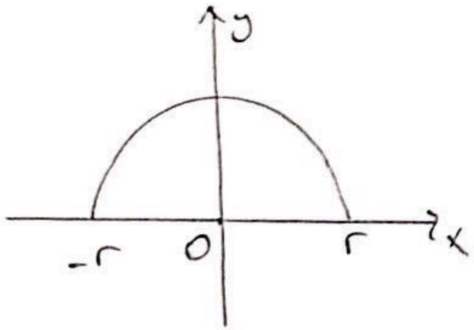
$y=f(x)$ eğrisinin $[a,b]$ üzerindeki parçasının

x eksenine göre momenti $\quad M_x=\int_a^b f(x)\sigma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

y " " " $\quad M_y=\int_a^b x\,\sigma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

orijine " " $\quad M_O=\int_a^b \sqrt{x^2+y^2}\,\sigma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Örnek: $y=\sqrt{r^2-x^2}$ yarı çemberi biçimindeki bir telin yoğunluk fonksiyonu $\sigma(x)=k=\text{sabit}$ olduğuna göre bu telin x eksenine göre momentini hesaplayalım.



$$y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} \Rightarrow 1+(y')^2=1+\frac{x^2}{r^2-x^2}=\frac{r^2}{r^2-x^2}$$

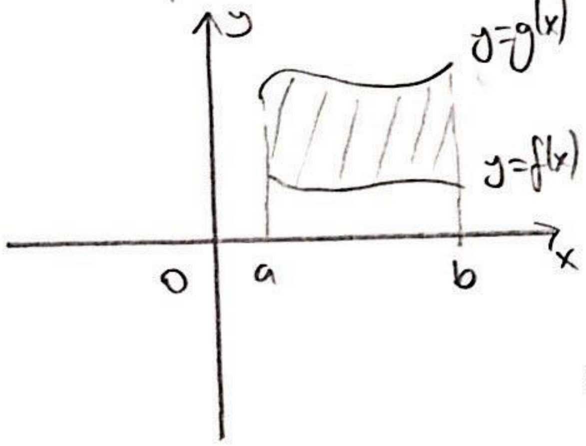
$$\Rightarrow M_x=\int_{-r}^{r} f(x)\,\sigma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,k\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$=rk\int_{-r}^{r}dx=2r^2k$$

Bir levhanın momenti

f ve g, $[a,b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar, her $x\in[a,b]$ için $f(x)\leq g(x)$ olsun. $B=\{(x,y): a\leq x\leq b,\ f(x)\leq y\leq g(x)\}$ bölgesine yerleştirilmiş $\sigma(x)$ yoğunluk fonksiyonuna sahip bir levhanın;



x eksenine göre momenti

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b\left(g^2(x)-f^2(x)\right)\sigma(x)\,dx$$

y eksenine göre momenti

$$M_y=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)x\,\sigma(x)\,dx$$

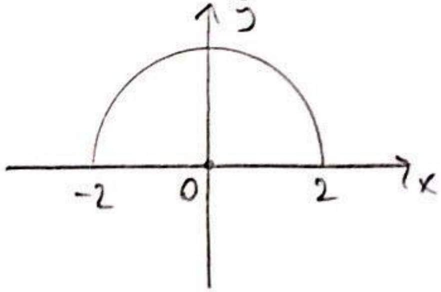
Ağırlık (kütle) merkezi

Çoğu mekanik sistem kütlesi ağırlık merkezi denilen tek bir noktada yoğunlaşmış gibi hareket eder. Ağırlık merkezi $(\bar{x}, \bar{y})$ olmak üzere

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

dir.

Örnek: $y = \sqrt{4-x^2}$ yarıçemberi biçimindeki bir telin yoğunluğu, her noktada o noktanın ordinatının 2 katıdır. Bu telin ağırlık merkezini bulalım.



$$\sigma(x) = 2y = 2\sqrt{4-x^2}$$

$$m = \int_{-2}^{2} \sigma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_{-2}^{2} 2\sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 2\cancel{\sqrt{4-x^2}}\,\frac{2}{\cancel{\sqrt{4-x^2}}}\,dx = 16$$

$$M_x = \int_{-2}^{2} f(x)\sigma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, 2\cancel{\sqrt{4-x^2}}\, \frac{2}{\cancel{\sqrt{4-x^2}}}\,dx$$

$$= 4\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 4\left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\arcsin\frac{x}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} = 8\pi$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{8\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$$

$$M_y = \int_{-2}^{2} x\,\sigma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_{-2}^{2} x\cancel{\sqrt{4-x^2}}\,\frac{2}{\cancel{\sqrt{4-x^2}}}\,dx = x^2\Big|_{-2}^{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{M_y}{m} = 0$$

O halde ağırlık merkezi

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

dir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri
Matematik II

Ders 9