



**UZEM** | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü  
Dijital Ders Platformu

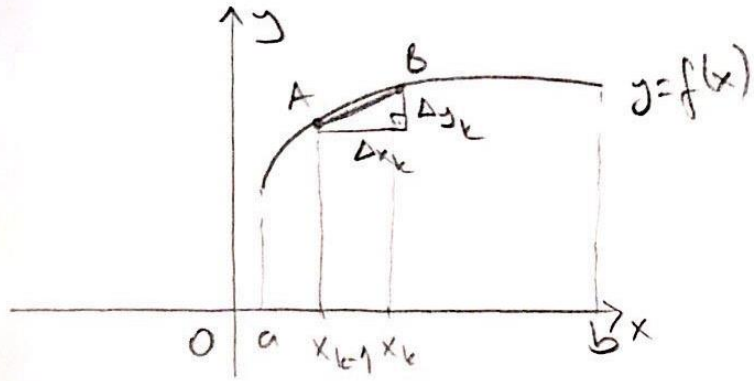
Yay Uzunluğu Hesabı

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Ders 13

## Yay uzunluğunun hesabı

$y=f(x)$  türevlenebilir bir fonksiyon olsun.  $y=f(x)$  eğrisinin  $x=a$  ve  $x=b$  noktaları arasındaki parçasının uzunluğunu  $[a,b]$  nin bir bölünüşü bulalım:



$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  olsun. Şekildeki AB doğru parçasının uzunluğu ile AB yayının uzunluğu yaklaşık olarak birbirine eşittir.

Bu şekildeki doğru parçalarının uzunluklarının toplamı yaklaşık olarak eğrinin uzunluğunu verir. AB doğru parçasının uzunluğu

$$s_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

dir. O halde verilen eğrinin uzunluğu yaklaşık olarak

$$s \approx \sum_{k=1}^n \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

$$\begin{aligned} \text{dir.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\Delta x_k^2 \left(1 + \frac{\Delta y_k^2}{\Delta x_k^2}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k \end{aligned}$$

$[x_{k-1}, x_k]$  da Ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$f'(c_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$

olacak şekilde  $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$  vardır.

$\sum_{k=1}^n \sqrt{1+f'(c_k)^2} \Delta x_k$  toplamı  $\sqrt{1+f'(x)^2}$  fonksiyonunun  $[a, b]$  aralığı üzerindeki Riemann toplamı olduğundan  $y=f(x)$  eğrisinin  $x=a$  ve  $x=b$  noktaları arasındaki uzunluğunu

$$s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

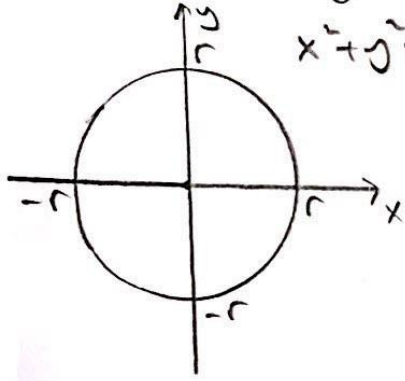
dir.

Benzer şekilde  $x=g(y)$  eğrisinin  $y=c$  ve  $y=d$  noktaları arasındaki uzunluğunu

$$l = \int_c^d \sqrt{1+g'(y)^2} dy$$

dir.

**Örnek:**  $r$  yarıçaplı çemberin çevre uzunluğunu hesaplayalım:



$x^2 + y^2 = r^2$  Çemberin çevre uzunluğunu hesaplamak için 1. bölgedeki parçasının uzunluğunu 4 ile çarpmak yeterlidir.

1. bölgedeki parça:  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$\Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow s = 4 \int_0^r \sqrt{1 + y'^2} dx = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

$$= 4r \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = 4r (\arcsin 1 - \arcsin 0) = 4r \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = 2\pi r$$

**Örnek:**  $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$  eğrisinin  $[\frac{1}{2}, 2]$  aralığında kalan kısmının yay uzunluğunu bulalım:

$$y' = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$$



$$s = \int_{1/2}^2 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{1/2}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)^2} dx = \int_{1/2}^2 \left(\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}\right) dx$$

$$= \int_{1/2}^2 \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2} dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}\right) \Big|_{1/2}^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{48} - 1\right) = \frac{33}{16}$$

Parametrik denklemler ile verilen eğrinin yay uzunluğu

Parametrik denklemleri  $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$  olan eğrinin  $t=a$  ve  $t=b$  noktaları arasındaki uzunluğu

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

olduğu kullanılırsa

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

dir.

<sup>M</sup> Örnek:  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$  eğrisinin  $t=0$  ve  $t=\frac{\pi}{2}$  arasındaki parçasının uzunluğunu bulalım.

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} = 3a \sin t \cos t = \frac{3a}{2} \sin 2t$$

$$\Rightarrow s = \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \, dt = -\frac{3a}{4} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3a}{4} (\cos \pi - \cos 0)$$

$$= -\frac{3a}{4} (-1 - 1) = \frac{3a}{2}$$



**UZEM** | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü  
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri  
Matematik II

Ders 7