



**UZEM** | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü  
Dijital Ders Platformu

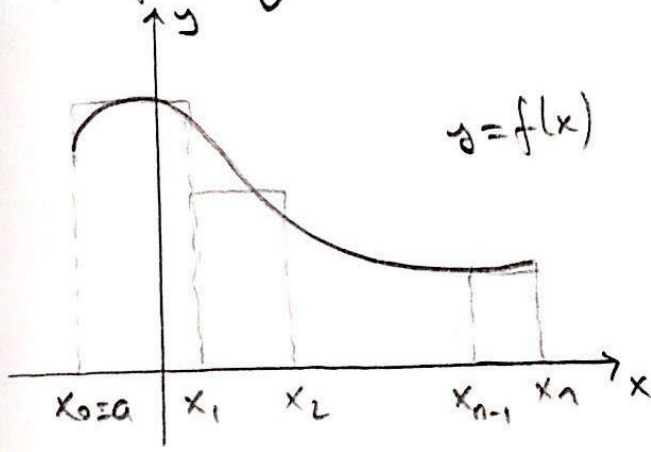
Belirli İntegral  
Yardımla Alan  
Hesabı

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Ders 12

## Belirli integral yardımıyla alan hesabı

1)  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında pozitif ve sürekli olsun.



$x_0=a, x_n=b$ ,  $x$  eksen ve  $y=f(x)$  fonksiyonu ile sınırlı bölgenin  $A$  alanını hesaplayalım:

$[a, b]$  aralığının bir düzgün bölünüşü

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  olsun.

Şekildeki dikdörtgenlerin alanları toplamı  $A$ 'nın yaklaşık değerini verir.  $c_1 \in [x_0, x_1]$ ,  $c_2 \in [x_1, x_2]$ , ...,  $c_n \in [x_{n-1}, x_n]$  olmak üzere dikdörtgenlerin alanları toplamı

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k$$

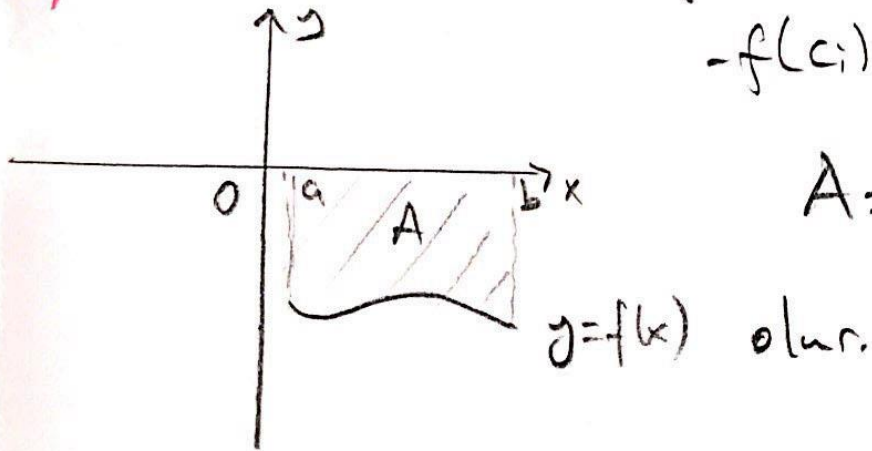
dir. Bu toplam bir Riemann toplamıdır ve

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

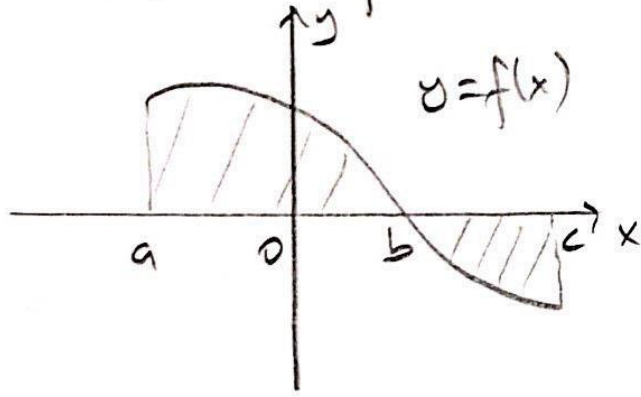
dir.

2) Her  $x \in [a, b]$  için  $f(x) \leq 0$  ise dikdörtgenlerin alanları  $-f(c_i)\Delta x_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  olacağından

$$A = - \int_a^b f(x)dx$$

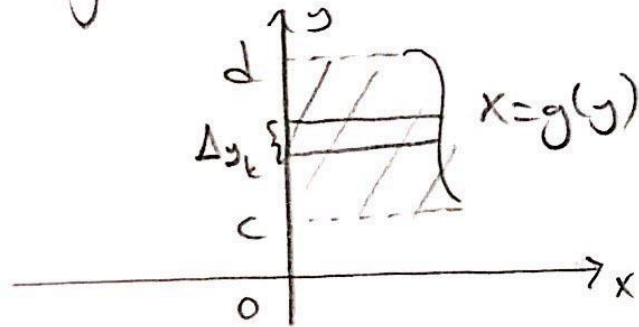


3)  $f$  fonksiyonun  $[a, b]$  aralığının bazı yerlerinde pozitif bazı yerlerinde negatif ise fonksiyonun pozitif veya negatif olduğu bölgelerdeki alanları ayrı ayrı hesaplanarak toplanır.



$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$$

4) Benzer şekilde,  $x=g(y)$  eğrisi,  $y$  eksenini,  $y=c$  ve  $y=d$  doğrularının sınırladığı bölgenin  $A$  alanı



$$A = \int_c^d g(y) dy$$

dir.

## Sonuç

1)  $y=f(x)$  eğrisi,  $x$  eksen,  $x=a$  ve  $x=b$  doğruları arasında kalan bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

dir.

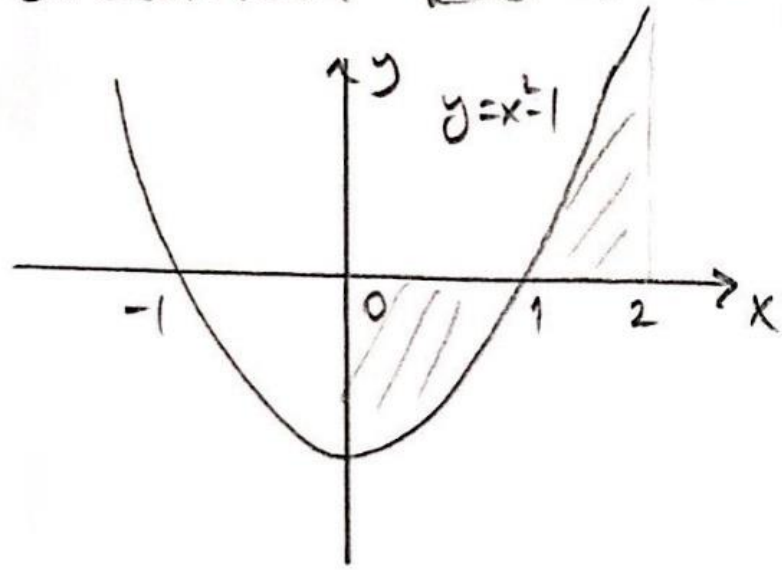
2)  $x=g(y)$  eğrisi,  $y$  eksen,  $y=c$  ve  $y=d$  doğruları arasında kalan bölgenin alanı

$$A = \int_c^d |g(y)| dy$$

dir.

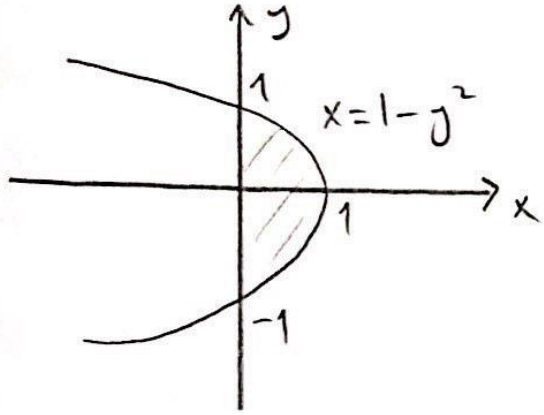
**Not:** Dikdörtgenler hangi eksenlere dikse sınırlar ve integral o eksenlere göre alınmalıdır.

**Örnek:**  $y = x^2 - 1$  eğrisi,  $x$  eksen,  $x=0$  ve  $x=2$  doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayalım.



$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \int_0^2 |x^2 - 1| dx = \int_0^1 |x^2 - 1| dx + \int_1^2 |x^2 - 1| dx \\ &= \int_0^1 \underbrace{(1 - x^2)}_{\geq 0} dx + \int_1^2 \underbrace{(x^2 - 1)}_{\geq 0} dx \\ &= \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} + 1 = 2. \end{aligned}$$

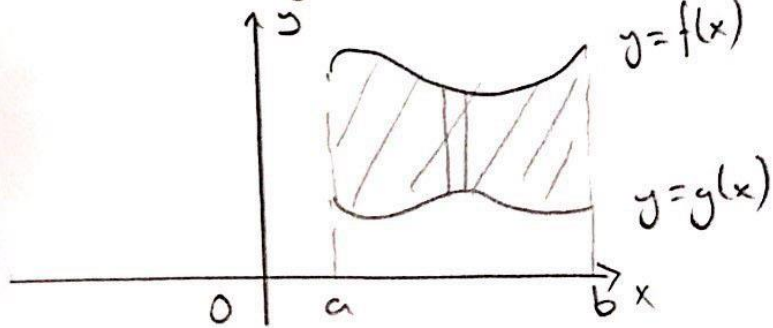
Örnek:  $x=1-y^2$  parabolü ile  $y$  eksenini arasında kalan bölgenin alanını bulalım:



$$\int_{-1}^1 (1-y^2) dy = \left( y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=-1}^{y=1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

iki eğrinin sınırladığı bölgenin alanı

$y=f(x)$ ,  $y=g(x)$  eğrileri ile  $x=a$  ve  $x=b$  doğrularının sınırladığı alan  $A$  olsun.  $f(x) > g(x)$  olmak üzere dikdörtgenlerin yükseklikleri  $f(x_k) - g(x_k)$  olacağından

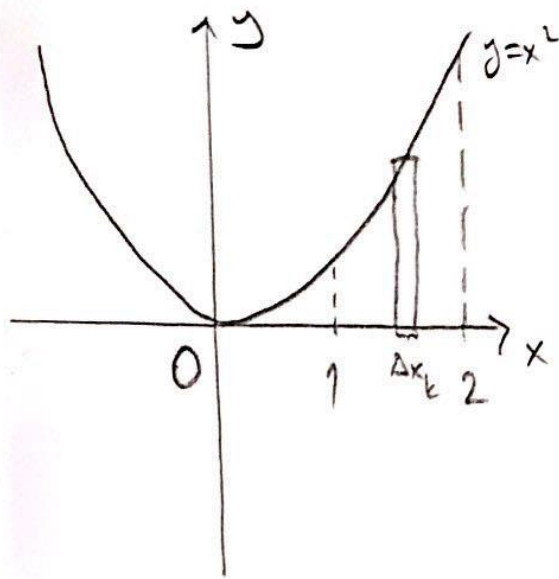


$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

dir.

**Not:** İntegral bölgesinde düzey şeridin alt ve üst uçlarının (yatay şerit ile kalınsılıyorsa sol ve sağ uçlarının) dayandığı eğriler aynı olmalıdır. Bu durumda istenen alan tek integral ile hesaplanabilir. Şeritlerin uçlarının dayandığı eğriler aynı değilse bölge bu özelliği gerektirecek şekilde alt bölgelere ayrılmalıdır.

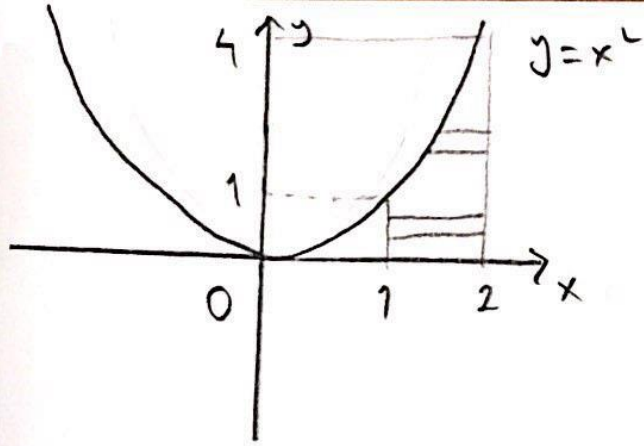
**Örnek:**  $y=x^2$ ,  $x=1$ ,  $x=2$ ,  $y=0$  tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulalım:



Bölgeyi düzey şeritle tarayalım:

$$\int_1^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$





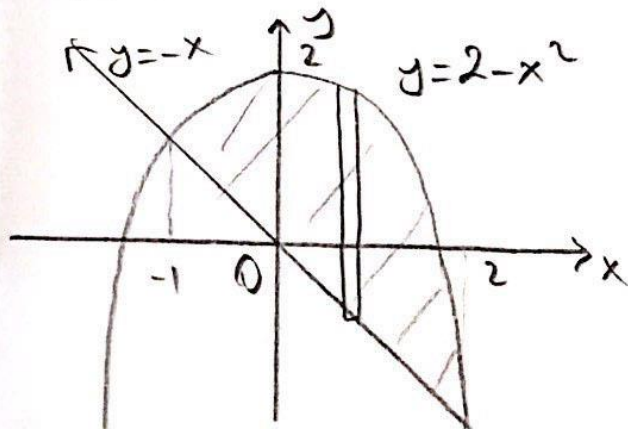
$$\int_0^1 (2-1) dy + \int_1^4 (2-\sqrt{y}) dy = y \Big|_0^1 + \left( 2y - \frac{2y^{3/2}}{3} \right) \Big|_1^4$$

$$= 1 + 8 - \frac{16}{3} - 2 + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{7}{3}$$

**Örnek:**  $y=2-x^2$  parabolü ve  $y=-x$  doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulalım.

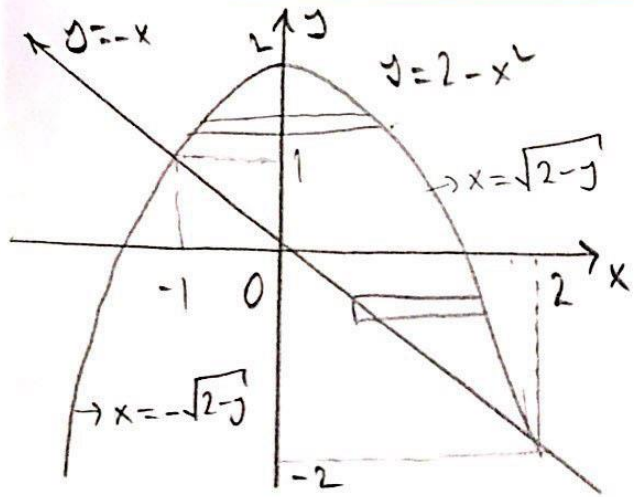
$$2-x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \text{Parabol ile doğru } x=2 \text{ ve } x=-1 \text{ de kesişiyor.}$$



$$\int_{-1}^2 (2-x^2 - (-x)) dx = \left( 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2$$

$$= 4 - \frac{8}{3} + 2 - \left( -2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{9}{2}$$



Bölgeyi yatay seritle tarayalım:

$$\int_{-2}^1 (\sqrt{2-y} + y) dy + \int_1^2 (\sqrt{2-y} - (-\sqrt{2-y})) dy$$

$$= \left( -\frac{2}{3} (2-y)^{3/2} + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 - \frac{4}{3} (2-y)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{9}{2}$$



**UZEM** | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü  
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri  
Matematik II

Ders 6