



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Riemann Toplamları

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Ders 11

Riemann toplamları

$[a, b]$ kapalı aralığı için $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ olmak üzere $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ kümesine $[a, b]$ aralığının bir bölünüşü denir. P bölünüşü $[a, b]$ yi n tane alt aralığa böler: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. Buna göre;

k . alt aralık $[x_{k-1}, x_k]$ ve bu aralığın uzunluğu

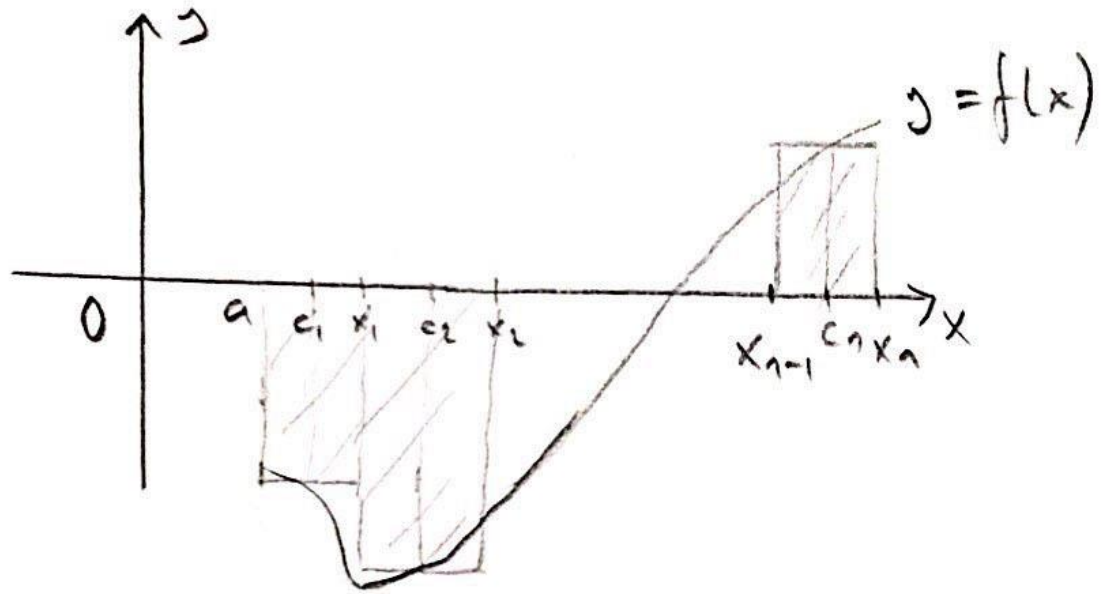
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \text{ dir.}$$

Şimdi her bir alt aralıktan bir $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$,

$k=1, 2, \dots, n$ noktası seçelim.

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

toplama f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki Riemann toplamı denir.



$$\|P\| = \max \{ \Delta x_k : k=1, 2, \dots, n \}$$

sayısına $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bölünüşünün normu denir. Yani,
 P bölünüşünün normu alt aralıkların uzunluklarının
 en büyüğüdür.

Tanım: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $[a, b]$ aralığının bir bölünüşü, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

Riemann toplamının limiti varsa bu limit değere f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığı üzerinde belirli integrali denir ve $\int_a^b f(x) dx$ ile gösterilir.

Burada a ve b ye, sırasıyla, integralin alt ve üst sınırı denir.

Teorem: Sürekli bir fonksiyon integrallenebilir. Yani, f fonksiyonun $[a, b]$ üzerinde sürekli ise $\int_a^b f(x) dx$ mevcuttur.

Belirli integralin özellikleri

f ve g fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde integrallenebilirse aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$2) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$3) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ (k sabit)}$$

$$4) \int_a^b (f(x) \mp g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \mp \int_a^b g(x) dx$$

$$5) \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$6) f_{\min} \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f_{\max} \cdot (b-a)$$

$$7) \text{ Her } x \in [a, b] \text{ için } f(x) \geq g(x) \text{ ise } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \text{ dir.}$$

7. öteğelligin bir sonucu olarak $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ dir.

$$\text{Örnekle: } \int_{-1}^1 f(x) dx = 5, \int_1^4 f(x) dx = -2, \int_{-1}^1 g(x) dx = 7 \text{ ise}$$

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = - \int_1^4 f(x) dx = 2, \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 5 - 2 = 3$$

$$\int_{-1}^1 (f(x) + 2g(x)) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + 2 \int_{-1}^1 g(x) dx = 5 + 2 \cdot 7 = 19$$

Örnek: $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x} dx \leq \sqrt{2}$ olduğunu gösterelim:

$f(x) = \sqrt{1+\cos x}$ in $[0,1]$ üzerinde maksimum değeri

$f(0) = \sqrt{2}$ olup

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x} dx \leq f_{\max} \cdot (1-0) = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$

dir.

$[a,b]$ de integrallenebilen bir f fonksiyonun her $x \in [a,b]$ için $[a,x]$ üzerinde de integrallenebilir. Böylece

$$F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

biçiminde integral ile tanımlı fonksiyondan söz edilebilir. Bu integral $x \in [a,b]$ olmak üzere x değişkeninin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyonun türevi şu teorem ile verilir:

Teorem (Integral Hesabın Birinci Teoremi):

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ süreklili bir fonksiyon olmak üzere $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda F fonksiyonu türevlenebilir ve

$$F'(x) = f(x)$$

dir.

Teorem (Integralin türevi - Leibniz Teoremi):

u ve v fonksiyonları $[a, b]$ de türevlenebilir fonksiyonlar, f ise $[a, b]$ de integrallenebilir olsun. Bu durumda

$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ fonksiyonu türevlenebilir ve

$$F'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

dir.

Örnek: $F(x) = \int_x^{x^2} \sin t^2 dt \Rightarrow F'(x) = \sin(x^2)^2 (x^2)' - \sin x^2 (x)' = 2x \sin x^4 - \sin x^2$

Örnek: $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1} dt}{x^2} = ?$

$\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği vardır. L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1} dt}{\frac{d}{dx} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^4+1} - 0}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(x^4+1)} = 0.$$

Teorem (integral hesabın ikinci temel teoremi):

f fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ve F ise f nin bir ters türevi (ilkeli) ise

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$



Örnek: $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$.

Teorem (Belirli integraller için ortalama değer teoremi):

f fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ise en az bir $c \in [a, b]$ için

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

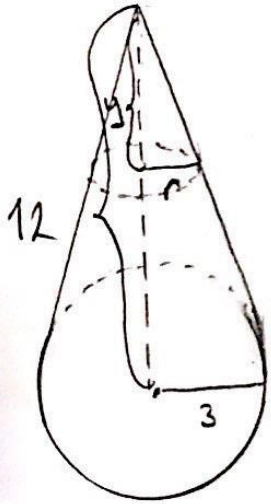
dir.

Teoremden geçen $f(c)$ sayısına f fonksiyonunun $[a, b]$ deki ortalama değeri denir.

Örnek: $f(x) = 3 - \cos x$ fonksiyonunun $[-\pi, \pi]$ deki ortalama değerini bulalım:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3 - \cos x) dx = \frac{1}{2\pi} (3x - \sin x) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{2\pi} (3\pi - \sin \pi + 3\pi + \sin \pi) = 3$$

Örnek: Taban yarıçapı 3 br., yüksekliği 12 br. olan bir dairesel dik koni tepesinden y br. uzakta tabanına paralel bir düzlemlerle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değerini bulalım:



$$\frac{y}{12} = \frac{r}{3} \Rightarrow r = \frac{y}{4}, y \in [0, 12]$$

$$\Rightarrow \text{Dairesel kesitin alanı} = \pi r^2 = \frac{\pi y^2}{16}$$

\Rightarrow Dairesel kesitin alanının ortalama değeri

$$\frac{1}{12} \int_0^{12} \frac{\pi y^2}{16} dy = \frac{1}{12 \cdot 16} \frac{\pi y^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=12} = \frac{\pi \cdot 12^3}{12 \cdot 16 \cdot 3} = \frac{\pi \cdot 12^2}{16 \cdot 3} = 3\pi$$

Teorem (Değişken Değiştirme): g fonksiyonu $[a, b]$ de türetilenebilir, f ise bu aralıkta integrallenebilir olsun. $g(x) = u$ için

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Örnek: $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = ?$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, u = g(x) = \sin x \Rightarrow f(g(x)) = \frac{1}{1+\sin^2 x}, g'(x) = \cos x$$

$$g(0) = \sin 0 = 0, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = \arctan u \Big|_{u=0}^{u=1} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

Not: Belirli integral değişken değiştirme yöntemi ile hesaplanacak ise integralin sınırları da değiştirilmelidir. Baska bir yol ise, önce belirsiz integral hesaplanıp eski değişkene dönülerek belirli integrali hesaplanabilir.

Teorem (Kısmi integrasyon):

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Örnek: $I = \int_0^{\pi} x \cos x dx = ?$

$$x = u, \quad \cos x dx = dv \quad \Rightarrow \quad dx = du, \quad v = \sin x$$

$$I = x \sin x \Big|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \overset{0}{\pi} \overset{0}{\sin \pi} - \overset{0}{0} \overset{0}{\sin 0} - (-\cos x) \Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri
Matematik II

Ders 5