



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Sonlu Toplamlarla
Tahminde Bulunma
ve Alan

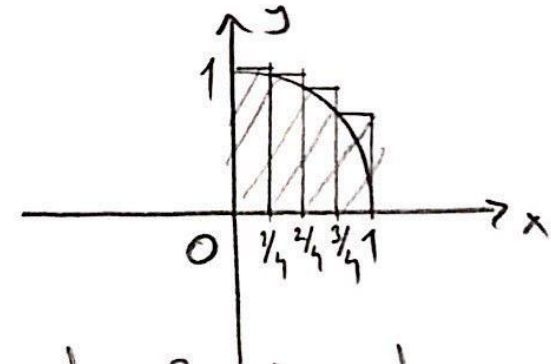
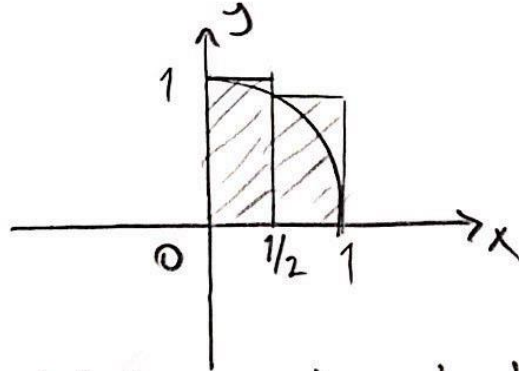
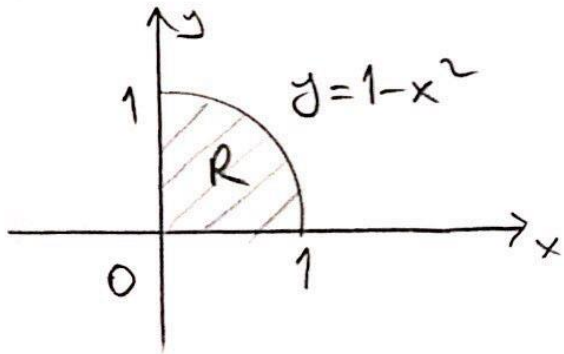
Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Ders 10

Sonlu toplamlarla tahminde bulunmak ve alan

Belirli integral, matematik ve diğer bilim dallarında önemli büyüklükleri hesaplamak için kullanılan bir araçtır. Bunlar arasında; eğri uzunluğu, alan, hacim ve olasılık gibi büyüklükler vardır. Bu büyüklükleri sonlu toplamlar yardımıyla hesaplayarak belirli integrale başlayacağız.

x eksenini, $y = 1 - x^2$ eğrisi, $x = 0$ ve $x = 1$ doğruları arasında kalan R bölgesinin alanını bulmaya çalışalım:



R bölgesini kapsayan dikdörtgenler kullanılarak R 'nin alanı için bir tahminde bulunulabilir. Bu dikdörtgenler R bölgesinin dışına çıktığı için hesaplanan alan R 'nin alanından büyüktür.

$[0,1]$ aralığında dikdörtgenin tabanını oluşturan her alt aralıkta fonksiyonun en büyük değeri hesaplanarak iki dikdörtgenin alanı toplanırsa, R bölgesinin A alanının yaklaşık olarak değeri

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$$

olarak bulunur. $[0,1]$ aralığı 4 parçaya bölündüğünde ise

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0,78125$$

elde edilir.

Dikdörtgenler R bölgesini içine aldığından bu tahminler gerçek alandan büyüktür.

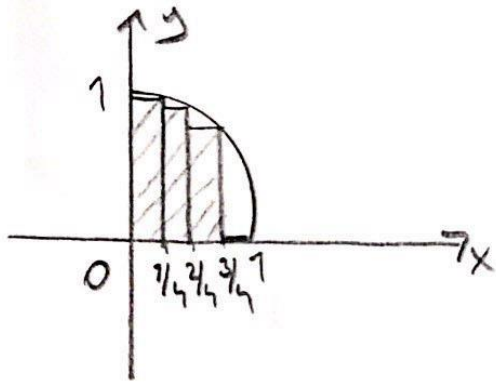
Tanım: Yükseklikleri her alt aralıkta fonksiyonun aldığı maksimum değer olan dikdörtgenlerin alanları toplamına üst toplam denir.

Yukarıdaki R bölgesi için hesaplanan $0,875$ ve $0,78125$ değerleri R için birer üst toplamdır. Bu değerlerden

0,78125 in A ya daha yakın olduğuna dikkat ediniz.

Alan tahmin için başka yaklaşımlar da vardır.

Tanım: Yükseklikleri her alt aralıkta fonksiyonun minimum değeri olan dikdörtgenlerin alanları toplamına alt toplam denir.



Yandaki şekilde R bölgesinin bir alt toplamı görülmektedir. Buna göre alan

$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0,53125$$

dır. Bu tahmin A dan küçüktür. A nın değeri alt ve üst toplamlar arasındadır.

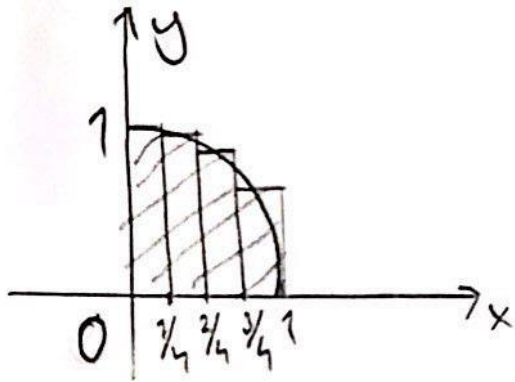
$$\Rightarrow 0,53125 < A < 0,78125$$

Bu durumda hatanın büyüklüğü için de bir sınır elde edilir. Burada hata

$$0,78125 - 0,53125 = 0,25$$

den büyük olamaz.

Bir diğer tahmin ise yükseklikleri tabanlarının orta noktalarında fonksiyonun değerine eşit olan dikdörtgenler kullanılarak elde edilebilir. Bu yöntem orta nokta kuralıdır.

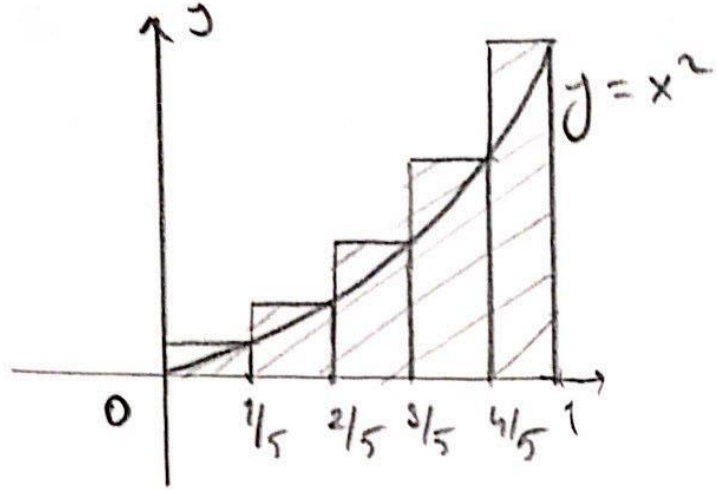


Bu tahmin alt toplam ile üst toplam arasında bir tahmin verir. Fakat alanın gerçek değerinden küçük veya büyük olduğu belli değildir. Orta nokta kuralına göre A alanının yaklaşık değeri

$$A \approx \underbrace{\frac{63}{64}}_{f(1/8)} \cdot \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{55}{64}}_{f(3/8)} \cdot \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{39}{64}}_{f(5/8)} \cdot \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{15}{64}}_{f(7/8)} \cdot \frac{1}{4} = 0,671875 = \frac{43}{64}$$

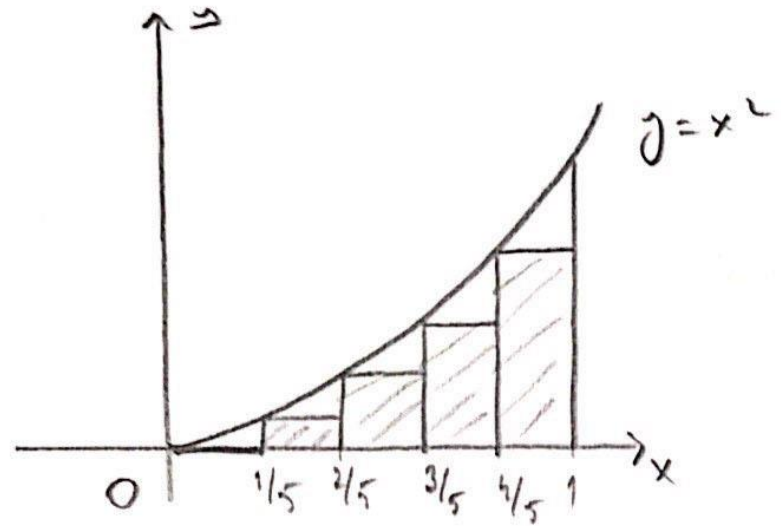
dür.

Örnek: $[0,1]$ aralığını 5 eşit parçaya bölerek $f(x)=x^2$ fonksiyonunun alt ve üst toplamlarını bulalım:



Üst toplam

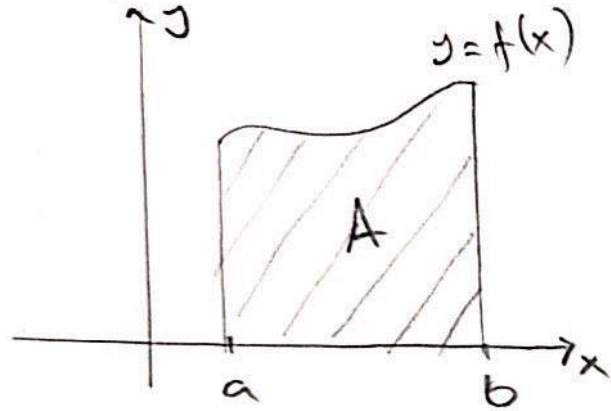
$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{1}{5} f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} f(1) \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25} + \frac{16}{25} + 1 \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{55}{25} = \frac{11}{25} \end{aligned}$$



Alt toplam

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{5} f(0) + \frac{1}{5} f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{1}{5} \left(0 + \frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25} + \frac{16}{25} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{30}{25} = \frac{6}{25} \end{aligned}$$

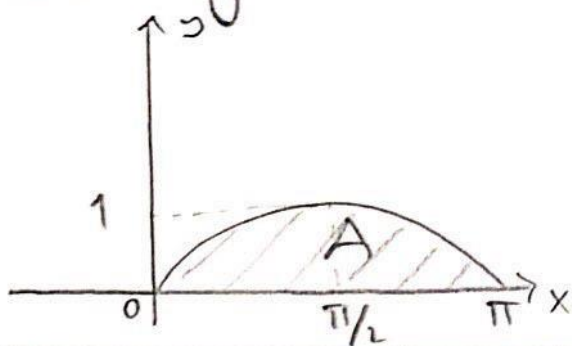
Tanım: $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, negatif olmayan, sürekli bir f fonksiyonunun ortalama değeri; $y=f(x)$ eğrisi, x eksenini, $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasında kalan bölgenin alanının $b-a$ ile bölümüne eşittir.



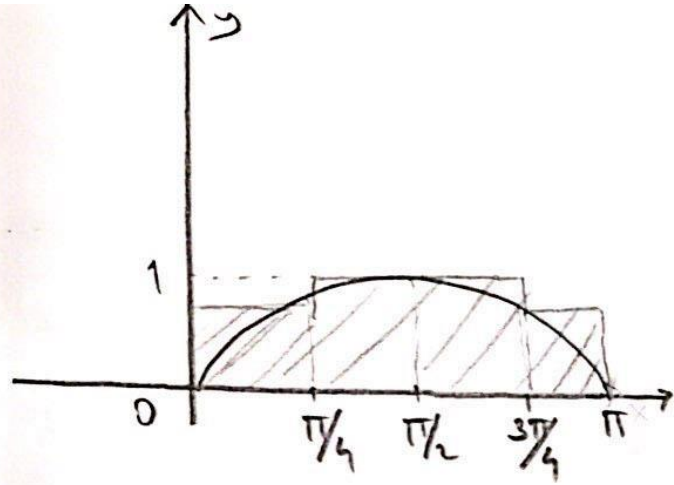
f 'nin ortalama değeri

$$\frac{A}{b-a}$$

Örnek: $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığındaki ortalama değerini tahmin edelim.



Şu anda A alanını tam olarak hesaplamayı bilmiyoruz. Fakat A için bir tahminde bulunabiliriz.



A için üst toplama

$$\begin{aligned}
 A &\approx \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \cdot (2 + \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

0 halde f in $[0, \pi]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri için bir tahmin

$$\frac{\frac{\pi}{4} \cdot (2 + \sqrt{2})}{\pi} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Alan yaklaşım için üst toplama kullandığımızımdan dolayı ortalama değer için bulduğumuz bu değer gerçek ortalama değerden büyüktür. Eğer verilen $[0, \pi]$ aralığını daha çok alt aralığa bölerssek gerçek ortalama değere daha çok yaklaşırız.

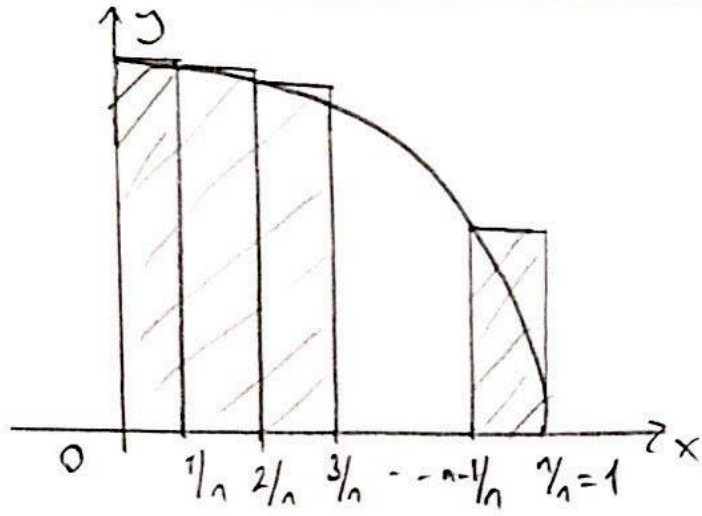
Sonlu toplamların limitleri

Örnek: Sayıları sonsuza ve genişlikleri sıfıra yaklaşan eşit genişlikli dikdörtgenleri kullanarak $y=1-x^2$ eğrisi altında ve x ekseninin $[0,1]$ aralığı üstündeki R bölgesinin alanının alt ve üst toplam yaklaşımları için limit değeri bulalım.

$[0,1]$ aralığını eşit uzunluklu n tane alt aralığa bölersek her bir alt aralığın uzunluğu

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

olur. Böylece genişliği $\frac{1}{n}$ olan n tane dikdörtgen elde ederiz. Dikdörtgenin yüksekliği olarak fonksiyonun bir alt aralık tarafından en büyük (en küçük) değeri alırsa R 'nin alanı için üst (alt) toplam elde ederiz.



üst toplam

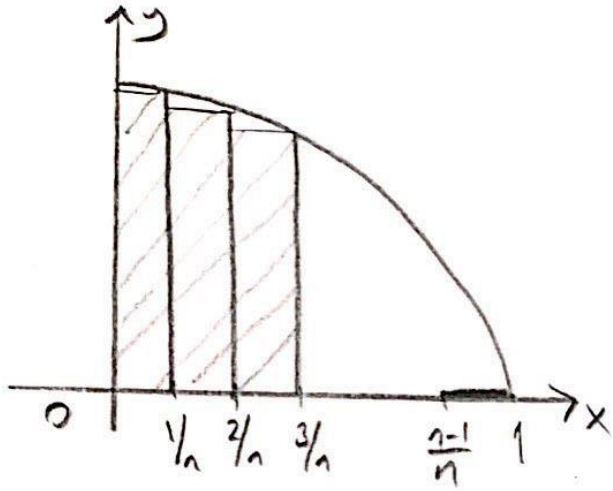
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \right) \\ &= \frac{n-1}{n} - \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n-1}{n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \end{aligned}$$

dir. Bu ifadenin $n \rightarrow \infty$ için limiti alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \right) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

elde edilir.

Şimdi de R bölgesinin alanının alt toplamı için bir limit değeri bulalım:



Alt toplam

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

R bölgesinin alanının gerçek değeri alt ve üst toplam tahminleri arasında olacağı için gerçek alan da $\frac{2}{3}$ tir.

O halde, her solun toplam yaklaşımının limiti $\frac{2}{3}$ olacaktır.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri
Matematik II

Ders 4