



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Özel Değişken
Değiştirme

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Ders 8

Özel değişken değiştirme

İntegrant içinde

$$\sqrt{x^2 - a^2} \text{ var ise } x = a \sec u$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} \quad " \quad " \quad x = a \cos u \text{ veya } x = a \sin u$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \quad " \quad " \quad x = a \tan u \text{ değişken değiştirme}$$

yapılır.

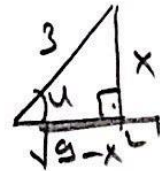
Örnek: $I = \int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}} dx = ?$

$$x = 3 \sin u \Rightarrow dx = 3 \cos u du \text{ ve } u = \arcsin \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{3 \sin u + 8}{\sqrt{9 - 9 \sin^2 u}} 3 \cos u du = \int \frac{3 \sin u + 8}{\cancel{3} \sqrt{1 - \sin^2 u}} \cancel{3} \cos u du$$

$$= \int (3 \sin u + 8) du = -3 \cos u + 8u + C$$

$$= -\frac{3 \sqrt{9-x^2}}{3} + 8 \arcsin \frac{x}{3} + C$$



Örnek: $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} dx = ?$

$x = 3\sec u \Rightarrow dx = 3\sec u \tan u du$ ve $u = \operatorname{arccsec} \frac{x}{3}$

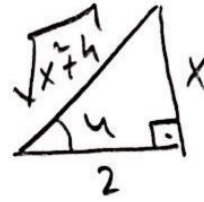
$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{\cancel{3\sec u} \tan u}{\cancel{3\sec u} \sqrt{9\sec^2 u - 9}} du = \int \frac{\cancel{\tan u}}{3\sqrt{\sec^2 u - 1}} du = \frac{1}{3} \int du \\ &= \frac{u}{3} + C = \frac{\operatorname{arccsec} \frac{x}{3}}{3} + C. \end{aligned}$$

Örnek: $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = ?$

$x = 2\tan u \Rightarrow dx = 2\sec^2 u du$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{2\sec^2 u du}{4\tan^2 u \sqrt{4\tan^2 u + 4}} = \int \frac{\sec^2 u du}{2\tan^2 u \sqrt{4(1+\tan^2 u)}} = \int \frac{\sec^2 u du}{4\tan^2 u \sec u} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} du = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{4t} + C = -\frac{1}{4\sin u} + C \\ &\quad \begin{matrix} \sin u = t \\ \cos u du = dt \end{matrix} \end{aligned}$$

$$x = 2 \tan u \Rightarrow \tan u = \frac{x}{2}$$



$$\sin u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

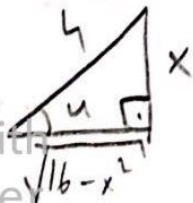
$$\Rightarrow I = -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + C$$

Örnek: $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16-x^2}} = ?$

$$x = 4 \sin u \Rightarrow dx = 4 \cos u \, du$$

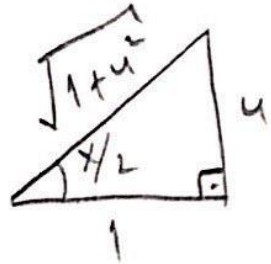
$$\Rightarrow I = \int \frac{4 \cos u \, du}{4 \sin^2 u \sqrt{16 - 16 \sin^2 u}} = \int \frac{\cos u \, du}{4 \sin^2 u \underbrace{4 \sqrt{1 - \sin^2 u}}_{\cos u}} = \frac{1}{16} \int \frac{du}{\sin^2 u}$$

$$= \frac{1}{16} \int \csc^2 u \, du = -\frac{\cot u}{16} + C = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C$$



"
 $\tan \frac{x}{2} = u$ değişken değişimi:

$\sin x, \cos x, \dots$ gibi trigonometrik fonksiyonların oluşturduğu bir polinomu rasyonel fonksiyona dönüştürmek için $\tan \frac{x}{2} = u$ değişken değişimi yapılır.



$$\sin \frac{x}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\Rightarrow \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\tan \frac{x}{2} = u \Rightarrow \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx = du \Rightarrow \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = du$$

$$\Rightarrow dx = 2 \cos^2 \frac{x}{2} du \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

Örnek: $I = \int \frac{1 + \sin x}{(1 + \cos x) \sin x} dx = ?$

$\tan \frac{x}{2} = u$ değişken değişimi yapılırsa

$$I = \int \frac{1 + \frac{2u}{1+u^2}}{\left(1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2u}{1+u^2}} du = \int \frac{u^2 + 2u + 1}{2u} du$$

$$= \int \left(\frac{u}{2} + 1 + \frac{1}{2u} \right) du = \frac{u^2}{4} + u + \frac{1}{2} \ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

Or note: $I = \int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx = ?$

$$\tan \frac{x}{2} = u \Rightarrow \cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad dx = \frac{2 du}{1 + u^2}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1 - \frac{1 - u^2}{1 + u^2}}{1 + \frac{1 - u^2}{1 + u^2}} \frac{2 du}{1 + u^2} = \int \frac{2u^2}{2} \frac{2}{1 + u^2} du = 2 \int \frac{u^2}{1 + u^2} du$$

$$\begin{array}{r} u^2 \\ \hline u^2 + 1 \\ \hline -1 \end{array} \Rightarrow \frac{u^2}{u^2 + 1} = 1 - \frac{1}{u^2 + 1}$$

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{u^2 + 1} \right) du$$

$$= 2u - 2 \arctan u + C$$

$$= 2 \tan \frac{x}{2} - x + C$$

$\sqrt[n]{ax+b}$ biçiminde ifadeler içeren fonksiyonların integrali

Bu tür ifadeler içeren fonksiyonların integralleri hesaplanırken n ; kök kuvvetlerinin en küçük ortak katı olmak üzere $ax+b = u^p$ değişken değişimi yapılır.

Örnek: $I = \int \frac{\sqrt[4]{x+1} + 2}{\sqrt[6]{x+1}} dx = ?$

ekok(4, 6) = 12 $\Rightarrow x+1 = u^{12} \Rightarrow dx = 12u^{11} du$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\sqrt[4]{u^{12}} + 2}{\sqrt[6]{u^{12}}} 12u^{11} du = \int \frac{(u^3 + 2) 12u^{11} du}{u^2}$$

$$= 12 \int (u^{12} + 2u^9) du = \frac{12}{13} u^{13} + \frac{24}{10} u^{10} + C$$

$$= \frac{12}{13} (x+1)^{13/12} + \frac{12}{5} (x+1)^{5/6} + C$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri
Matematik II

Ders 2