Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Kısmi İntegral

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER

Ders 6

Kısmi İntegral

u, v, x değişkeninin türevlenebilir (diferansiyellenebilir) iki fonksiyonu olsunlar. Bir çarpımın diferansiyelinden

$$d(u.v) = du.v + dv.u$$

$$\Rightarrow u\,dv = d(u.v) - v\,du$$ yazılabilir.

Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int u.dv = u.v - \int v\,du$$

bulunur.

Eğer $\int v.du$ integralinin hesabı $\int u\,dv$ integralinin hesabından daha kolay ise bu yöntemi kullanmak oldukça kolaylık sağlar.

❗ UYARI!

1) Bu yöntemi kullanmak için verilen integralin içi u ve dv diye iki çarpana ayrılmalı ve $\int v\,du$ integrali kolay hesaplanabilen bir integral olmalıdır.

2) Bu yöntem farklı türden fonksiyonlar integrandta çarpım durumunda ise kullanılır.

3) Kendisi integrandta yokken türevi varsa kısmi integral kullanılır.

4) Logaritma ve ters trigonometrik fonksiyonlar integrandta yalnızsa kısmi integral kullanılır. İndirgeme bağıntılarında kullanılır.

5) Kısmi integral uygularken u fonksiyonunun seçiminde şu sıralama dikkate alınır.

Logaritma fonks, Arc'lı fonks, Polinom, Trigonometrik, Üstel

Örnek: $I = \int x \sin 2x \, dx = ?$

Çözüm:

$x = u \qquad \sin 2x \, dx = dv$

$dx = du \qquad \int \sin 2x \, dx = \int dv \Rightarrow -\frac{1}{2}\cos 2x = v$

$$I = \int x \sin 2x \, dx = uv - \int v \, du$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \int \frac{1}{2} \cos 2x . dx$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

Örnek: $\int \ln x \, dx = ?$

Çözüm: $\ln x = u \rightarrow \frac{1}{x} dx = du \quad , \quad dx = dv \Rightarrow x = v$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x . \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

Örnek! $I = \int x e^{3x} dx = ?$

Çözüm!

$$x = u \Rightarrow dx = du$$

$$e^{3x} dx = dv \Rightarrow \int e^{3x} dx = \int dv \Rightarrow \frac{1}{3} e^{3x} = v$$

$$I = uv - \int v du = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} . dx$$

$$= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c$$

$$= \frac{1}{9} e^{3x} (3x - 1) + c$$

NOT! Bazı fonksiyonların integralini hesaplamak için kısmi integrasyon yöntemi bir kaç kez uygulamak gerekebilir.

Örneğin;

Örnek: $I = \int x^2 e^{-x} dx = ?$

Çözüm:

$$x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du$$
$$e^{-x} dx = dv \Rightarrow \int e^{-x} dx = \int dv \Rightarrow -e^{-x} = V$$

$$\Rightarrow I = u.v - \int v du = -x^2 e^{-x} + 2\underbrace{\int e^{-x} . x dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int x e^{-x} dx = ?$$

$$x = u \quad e^{-x} dx = dv$$
$$dx = du \quad -e^{-x} = V$$

$$I_1 = uv - \int v du = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c$$

$$\Rightarrow I = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) + c$$
$$I = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

Örnek: $I=\int \arctan x \, dx = ?$

Çözüm:

$$\arctan x = u \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}dx = du$$

$$dx = dv \Rightarrow x = v$$

$$I=\int \arctan x \, dx = uv - \int v\,du$$

$$= x\arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

Örnek! $I = \int \sec^3 x \, dx = ?$

Çözüm:

$$I = \int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$\sec x = u \Rightarrow \sec x \tan x \, dx = du$$

$$\sec^2 x \, dx = dv \Rightarrow \tan x = v$$

$$I = uv - \int v \, du = \sec x \tan x - \int \tan x \cdot \sec x \tan x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$\Rightarrow I = \sec x \tan x - \underbrace{\int \sec^3 x \, dx}_{I} + \int \sec x \, dx$$

$$// \int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + c$$

İndirgeme Bağıntıları

Kısmi integrasyon metodu yardımıyla yüksek dereceden bazı ifadelerin integrali daha küçük dereceden bir ifadenin integraline dönüştürülebilir. Bu yolla yüksek dereceli integral kolayca hesaplanabilir.

Örnek: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $I_n = \int \cos^n x \, dx$ integrali için bir indirgeme bağıntısını bulunuz.

Çözüm:

$$I_n = \int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx$$

$\cos^{n-1} x = u$, $\cos x \, dx = dv$

$-(n-1)\cos^{(n-2)} x \sin x \, dx = du$, $\sin x = v$

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^2 x \,.\, \cos^{n-2} x\, dx$$
$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\, dx$$

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1)\underbrace{\int \cos^n x\, dx}_{I_n}$$

$$(1+(n-1))I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx$$

$$n I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} dx$$
$$I_n = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} dx$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

$n=5$ için $\int \cos^5 x\, dx$ i hesaplayalım.

$$\int \cos^5 x\, dx = \frac{1}{5}\sin x \cos^4 x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x + c$$

bulunur.

Örnek! $I_n = \int (\ln x)^n dx = ?$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Çözüm:

$$(\ln x)^n = u \Rightarrow \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} dx = du$$

$$dx = dv \Rightarrow x = v$$

$$I_n = x(\ln x)^n - \int x \cdot \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} dx$$

$I_n = x(\ln x)^n - n I_{n-1}$ indirgeme bağıntısı bulunur.

Örneğin;

$$\int \ln^3 x dx = x(\ln x)^3 - 3\int (\ln x)^2 dx$$

$$= x(\ln x)^3 - 3\left[x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx\right] + c$$

$$= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6(x\ln x - x) + c$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersleri
Matematik II

Kısmi İntegral

Ders 6